BROOK TAYLOR

der Mathematiker und Philosoph

Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte
der Zeit des Newton-Leibniz-Streites

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Philosophischen Fakultät

der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Heinrich Auchter

aus Mannheim

Marburg 1937.

Druckerei und Verlag wissenschaftlicher Werke Konrad Triltsch, Würzburg

Diss. Marburg
1937.

* 43057.

Als Dissertation angenommen am 4. 12. 1935.

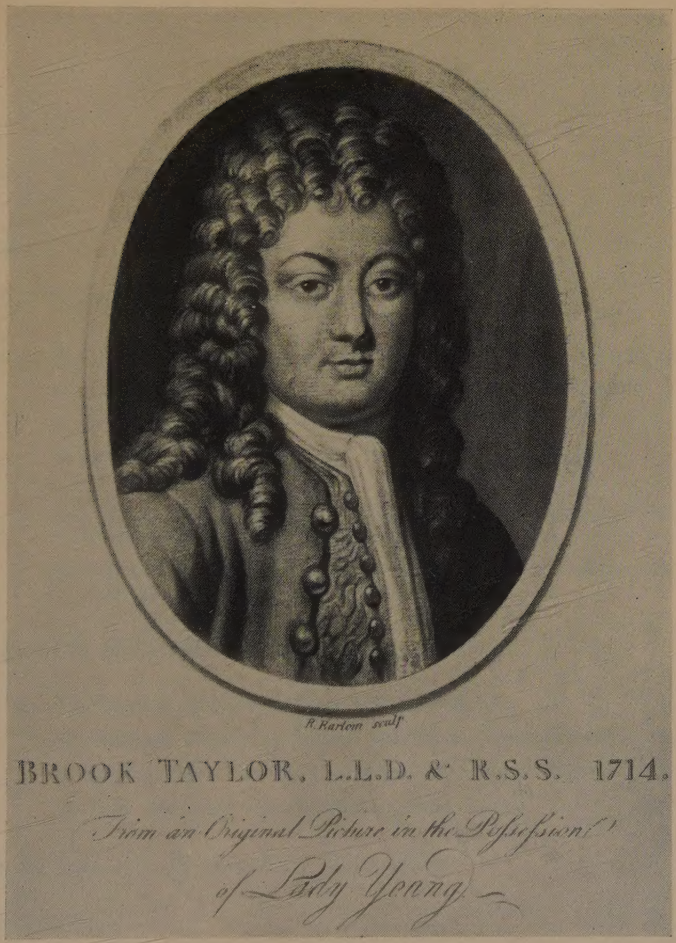
Berichterstatter: Professor Dr. *Dietrich Mahnke.*

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 6. 1936.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

Die vorliegende Arbeit ist als selbständiges Buch
vom Verlag Konrad Triltsch, Würzburg
zu beziehen.



Entnommen aus Taylors „Contemplatio philosophica", London 1793.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel: Taylors Leben und Schriften 3

II. Kapitel: Die mathematischen Leistungen Taylors und ihr Verhältnis zu den Entdeckungen von Leibniz und Johann Bernoulli . 8

1. Gesamtbericht über die „Methodus incrementorum“ . . 8

2. Geschichte des Streites um Taylors Selbständigkeit (1716—22) 18

3. Prüfung der Prioritätsansprüche Joh. Bernoullis, besonders hinsichtlich der „Bernoullischen Reihe“ 28

4. Prüfung der Prioritätsansprüche Leibnizens, besonders hinsichtlich der „Taylorschen Reihe“ 36

III. Kapitel: Die philosophischen Anschauungen Taylors 57

Anhang A: Aus Taylors wissenschaftlichem Briefwechsel 72

a) Fundorte sämtlicher bisher gedruckten wiss. Briefe . . 72

b) Inhaltsangabe der 1793 veröffentlichten wiss. Briefe . . 73

c) Text der 1793 veröffentlichten wiss. Briefe 83

Anhang B: Text der „Contemplatio philosophica“ 98

Literaturverzeichnis 111

Einleitung.

Der Name „Taylor" ist jedem Mathematiker durch den nach ihm benannten grundlegenden Satz für die Entwicklung von Funktionen in unendliche Reihen vertraut. Über die Person des Entdeckers aber und seine sonstigen wissenschaftlichen Leistungen ist verhältnismäßig wenig bekannt. Ja selbst die Geschichte seiner wichtigsten mathematischen Entdeckungen ist bisher erst so wenig aufgeklärt, daß der Plagiatsstreit, der ihretwegen mit den deutschen Mathematikern schon zu seinen Lebzeiten entbrannt ist, bis heute noch nicht endgültig entschieden ist. Eine wissenschaftsgeschichtliche Monographie über Taylor und die Taylorsche Reihe scheint mir daher wünschenswert zu sein.

Es ist mir gelungen, eine Reihe von Dokumenten wiederzufinden, aus denen auf Taylors Leben und wissenschaftliche Tätigkeit neues Licht fällt. Ein Enkel Taylors, Sir William Young, hat im Jahre 1793 zu London aus dem handschriftlichen Nachlasse eine „Contemplatio philosophica", das Fragment eines ersten Entwurfes für ein geplantes größeres Werk, als Privatdruck veröffentlicht (vgl. S. 6 mit Anm. 12). Auf Grund dieses bisher so gut wie unbekannt gebliebenen Druckes, von dem nur wenige Exemplare in englischen Bibliotheken erhalten sind, kann ich hier zum ersten Mal auch über die philosophische Denkweise des Mathematikers Taylor und seine persönliche Stellungnahme zu den Systemen der englischen Philosophen Hobbes, H. More und Cudworth sowie der französischen und deutschen Denker Descartes, Malebranche und Leibniz berichten.

Der Privatdruck Youngs enthält ferner eine Biographie und einen, leider nur kleinen, Teil des Briefwechsels von Taylor. Auch hieraus erhalten wir einige interessante Einblicke in bisher unbekannte Tatsachen, namentlich aus der Mathematikgeschichte der ausgehenden Newton-Leibniz-Zeit.

Zur Entscheidung des Taylorschen Plagiatsstreites und zur Aufklärung des wirklichen Werdens seiner wichtigsten Entdeckungen habe ich außer diesem Briefwechsel auch die Zeitschriftenaufsätze möglichst vollständig herangezogen, in denen Taylor, seine Freunde und Gegner sich darüber geäußert haben. Sehr wichtig ist hierunter der (von den Mathematikhistorikern bisher nicht beachtete) Selbstbericht Taylors über sein Hauptwerk, die „Methodus incrementorum", in den Philosophical Transactions vom Jahre 1716 und die Rezension des gleichen Werkes in der Bibliothèque Angloise vom Jahre 1717. Der Verfasser der letzteren ist nicht bekannt, doch hat er sicher von Taylor selbst Informationen erhalten, um die Vorwürfe zu entkräften, die in den Leipziger Acta eruditorum seit 1716 wegen der mangelnden Neuheit oder gar der Unselbständigkeit der „Me-

thodus incrementorum“ von Leibniz, Joh. Bernoulli, Nic. Bernoulli und Burchard in immer schärferer Form erhoben wurden. Durch Vergleich aller dieser Dokumente miteinander und mit den weiteren Quellenschriften, die in ihnen zitiert werden, glaube ich hinsichtlich der Hauptpunkte den Plagiatsstreit zu Taylors Gunsten entschieden zu haben, wenn auch die Priorität ihm fast nirgends, auch nicht bei der Reihe, die noch heute seinen Namen trägt, zuerkannt werden kann.

I. Kapitel.

Taylors Leben und Schriften.

Bevor ich die wissenschaftlichen Hauptleistungen Taylors im einzelnen darstelle, gebe ich zunächst einen allgemeinen Überblick über sein Leben und seine Schriften.

Brook Taylor wurde geboren am 18. August 1685 in Edmonton (Middlesex) als Sohn des John Taylor Esq. of Bifrons House (Kent) und der Baronet Olivia, Tochter des Sir Nicholas Tempest aus Durham. Seinen ersten Unterricht erhielt er zu Hause von dem Rev. Mr. Sacchette. 1701 kam er nach Cambridge in's St. John's College. Hier studierte er anfangs Rechtswissenschaft; später aber wandten sich seine Interessen mehr und mehr der Mathematik und Naturwissenschaft zu. Außerdem beschäftigte er sich nebenbei immer sehr viel mit Musik und Malerei, für die er ebenfalls sehr begabt war.

Im Jahre 1708 verfaßte er seine erste mathematische Arbeit über den Schwingungsmittelpunkt, aus der später ein Aufsatz in den Philosophical Transactions (1713) hervorging. Aber schon 1709 teilte er seine Ergebnisse brieflich dem Oxforder Professor John Keill mit und blieb mit ihm während der nächsten Jahre im Briefwechsel über mathematische Gegenstände. Im Jahre 1709 erwarb Taylor den Grad eines Baccalaureus der Rechte, 1714 die juristische Doktorwürde. Am 3. April 1712 wurde er zum Mitglied der Royal Society in London gewählt. In einem Brief an den Londoner Professor John Machin vom 16. Juli 1712 (a. St.) teilte er diesem die Lösung eines damals viel behandelten Keplerschen Problems mit und gab bei dieser Gelegenheit auch seine Entdeckung einer allgemeinen Reihenentwicklung erstmalig bekannt, die dann einige Jahre später in der „Methodus incrementorum" mit ihrem Beweis im Druck veröffentlicht worden ist und Taylors Namen berühmt gemacht hat. Im gleichen Jahre, in dem er den historischen Brief an Machin schrieb, überreichte er außerdem der Royal Society noch mehrere mathematisch-naturwissenschaftliche Aufsätze: Am 25. Juni 1712 „An account of the ascent of water between two glass planes" (gedruckt in den Phil. Trans. XXVII, 1712, No. 336, S. 538), im Juli den schon erwähnten „On the finding of the centre of oscillation" (Phil. Trans. XXVIII, 1713, No. 337, S. 11), und im September „On the motion of a stretched string" (Phil. Trans. XXVIII, 1713, No. 337, S. 26). Am 13. Juli 1713 legte er der Royal Society, wie sich aus einem Briefe an Keill ergibt, eine weitere Abhandlung „Of music" vor, die jedoch nicht gedruckt worden ist. Wahrscheinlich galt sie wieder dem vorigen Gegenstande, der ihn sowohl als Musikfreund wie als Mathematiker und Physiker besonders interessierte. Jedenfalls ist Taylor der Begründer einer exakten Theorie der für die musikalische Akustik sehr wichtigen Saitenschwingungen.

Am 14. Januar 1714 erhielt Taylor die Stelle des ersten Sekretärs der Royal Society. In dieser Stellung war er bei den mehrfachen Plagiatsstreitigkeiten zwischen englischen und ausländischen Gelehrten, besonders zwischen Newton und Leibniz, persönlich beteiligt[1]). Auch kam er als Sekretär der Royal Society zu vielen ausländischen Gelehrten in persönliche Beziehungen. Z. B. lernte er den französischen Mathematiker Pierre Rémond de Montmort und den italienischen Abbé Conti kennen, als diese im April 1715 nach England kamen, um die (dort totale) Sonnenfinsternis zu beobachten und mit Newton und anderen englischen Gelehrten Verbindung anzuknüpfen.

Auf Montmorts Einladung reiste Taylor bald darauf nach Frankreich und verkehrte hier mit zahlreichen Mitgliedern der Pariser Académie des Sciences, aber auch mit verschiedenen, den exakten Wissenschaften ferner stehenden Männern, wie dem Politiker und deistischen Schriftsteller Lord Bolingbroke, dem Grafen Caylus und dem Bischof Bossuet. Mit Montmort blieb er von 1715 an bis zu dessen Tode, 1719, in eifrigem Briefwechsel, besonders über mathematische Probleme. Auch in die Philosophie Malebranches wurde Taylor durch Montmort eingeführt, der sie sehr hoch schätzte; aber in dieser Hinsicht blieb zwischen den Freunden doch ein unüberbrückter Gegensatz bestehen. (Näheres hierüber und über den weiteren Inhalt des Briefwechsels s. im Anhang A).

Kurz nach Taylors Rückkehr in die Heimat erschien seine wichtigste und bekannteste Schrift, die „Methodus incrementorum directa et inversa", London 1715, die aber schon im April 1714 bei der Royal Society eingereicht worden war. Hier wird u. a. im 7. Satze die 1712 von ihm entdeckte „Taylorsche Reihe" abgeleitet. Ein Selbstbericht über das Buch „An account of a book entitled Methodus incrementorum. By the Author" wurde im Februar 1715/16 (d. h. 1715 nach der damaligen englischen, 1716 nach heutiger Chronologie) in den Philosophical Transactions (XXIX, No. 345, S. 339) veröffentlicht. Eine 2. Auflage kam 1717 heraus. Mit dem Verhältnis der beiden Auflagen zueinander und mit dem mathematischen Hauptinhalt dieser Schrift werden wir uns später, zu Anfang des II. Kapitels, noch genauer beschäftigen. Die Herausgabe der „Methodus incrementorum" machte Taylor in der gelehrten Welt, besonders Englands, berühmt, verursachte aber auch einen für ihn sehr unerfreulichen Prioritäts- und Plagiatsstreit mit Leibniz, Joh. Bernoulli und ihren Freunden, von dem wir ebenfalls im II. Kapitel noch Näheres hören werden.

Bald nach der ersten Auflage seines Hauptwerkes veröffentlichte er ferner einen Aufsatz über „An experiment in order to discover the law of magnetical attraction" (Phil. Trans. XXIX, 1715, No. 344, S. 294) sowie ein zweites größeres Werk: „On the principles of linear perspective", London 1715[2]). (Eine zweite, verbesserte Auf-

[1]) Schon bevor Taylor Sekretär der Royal Society wurde, gehörte er seit dem 17. April 1712 der Kommission an, die sie zur Prüfung der Priorität Newtons oder Leibnizens eingesetzt hatte. Vgl. Cantor, Vorlesungen über Gesch. d. Math., Bd. III², 1901, S. 306, 308.

[2]) Näheres über dieses Buch siehe Cantor, Vorl. IV, 1908, S. 597 bis 602 u. 607; vgl. S. 618 (Lambert) u. S. 635 (Monge).

lage davon erschien im Jahre 1719). Wie in der Arbeit über Saitenschwingungen sein musikalisches Interesse, so verband sich in dieser seine zeichnerische und malerische Begabung mit dem Streben nach mathematisch-exakter Behandlung der Naturerkenntnis. Auch die Schrift über Linearperspektive gab Joh. Bernoulli wieder Anlaß zu unliebsamen Plagiatsstreitigkeiten.

Im Jahre 1716 setzte Taylor besonders seine mathematischen Arbeiten eifrig fort, so daß er im nächsten Jahre wieder mehrere Abhandlungen bei der Royal Society einreichen konnte. Die erste ist: „An attempt towards the improvement of the method of approximating, in the extractions of roots of equations in numbers“ [3]); die zweite ergänzt Montmorts „Treatise on infinite series“ durch einen „Appendix, in which several parts are treated in a different way“ [4]); die dritte und vierte geben eine „Solution of De Moivre's 15.th Problem, with the assistence of combinations and infinite series“ und „A solution of a problem, lately proposed by M. Leibnitz to the English geometricians“ [5]). Alle vier erschienen im XXX. Bande der Philosophical Transactions (1717). In Erwiderung des im letzten Aufsatze von ihm gelösten Leibnizschen Trajektorienproblems hatte übrigens Taylor im Jahre zuvor den deutschen Mathematikern ein noch schwierigeres Problem dieser Art vorgelegt; Näheres darüber erfahren wir aus dem Briefe Montmorts vom 12. April 1716 [6]).

Taylors leidende Gesundheit veranlaßte ihn (nach Montmorts Brief vom 28. Mai 1717 [7]), die Bäder in Aachen und Spa aufzusuchen. Auch bat er am 21. Oktober 1718 in einem Briefe an den zweiten Sekretär Halley um Befreiung von seinem Amte in der Royal Society; daraufhin wurde am 1. Dezember 1718 Machin zu seinem Nachfolger gewählt [8]). Vielleicht hängt es mit seiner Krankheit zusammen, daß er seine mathematischen Untersuchungen in den nächsten Jahren hinter allgemeinen Fragen der Metaphysik, Moral und Religion zurücktreten ließ [9]). Z. B. schrieb er nach der Rückkehr aus Aachen 1719 einen „Treatise on the Jewish sacrifices“ und eine größere Abhandlung „On the lawfulness of eating blood“. Eine zweite Reise nach Frankreich im Jahre 1720 galt dem Besuch des Bades La Source bei Orléans. Seine Gesundheit scheint sich dort etwas gebessert zu haben. Nach der Rückkehr in die Heimat nahm er seine wissenschaftliche Tätigkeit noch einmal wieder auf; er veröffentlichte 1721 zwei ältere Abhandlungen: „Some propositions concerning the parabolic motion of projectiles, written in 1710“ und „Some experiments relating to

---

[3]) Phil. Trans. XXX, 1717, No. 352, S. 610 ff. Hier wird die Taylorsche Reihe auf die Algebra angewandt. Vgl. dazu Cantor, Vorl. III², 1901, S. 409/10 und IV, 1908, S. 441.

[4]) Phil. Trans. XXX, 1717, No. 353, S. 633 ff.

[5]) ebenda S. 676 ff. u. 695 ff. Zum letzten Aufsatz vgl. Cantor III², S. 468—73.

[6]) s. Anhang A, No. 5 und Anm. 138.

[7]) ebenda No. 6.

[8]) Vgl. Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 231. Den Brief an Halley siehe hier im Anhang A, No. 9.

[9]) Nur der Streit mit Joh. Bernoulli ging weiter; vgl. die Briefe No. 13—15 im Anhang A.

magnetism", die er schon 1714 an Sloane mitgeteilt hatte[10]), ferner 1723 eine neue Abhandlung: „An experiment, made to ascertain the proportion of expansion of the liquor in the thermometer, with regard to the degree of heat"[11]). Auch verheiratete er sich 1721, als 36 jähriger, mit Miss Brydges aus Wallington (Surrey). Diese Wahl führte zu einem Zerwürfnis mit seinem Vater. Nach zweijähriger Ehe starb aber seine Frau mit ihrem eben geborenen Sohne.

Im Jahre 1725 verheiratete sich Taylor zum zweiten Mal, mit Sabette, der Tochter des John Sawbridge, Esq. von Olantigh (Kent), jetzt mit voller Zustimmung seines Vaters. Dieser starb im Juli 1729, und sein Sohn folgte ihm nun als Besitzer von Bifrons House nach. Im März des folgenden Jahres verlor Taylor auch seine zweite Gattin im Wochenbett. Sie hinterließ ihm aber eine Tochter Elizabeth, die später die Gattin von Sir William Young wurde.

Kurz vorher war Taylor zum letzten Mal zu seinen früheren mathematischen Interessen zurückgekehrt und hatte eine Arbeit über Logarithmen geschrieben. 1730 aber übergab er sie seinem Freunde Lord Paisley (später Lord Abercorn), der sie druckfertig machen sollte. Der Druck ist jedoch nicht ausgeführt worden. Es scheint, daß Taylor in seinen letzten Lebensjahren, unter dem Eindrucke des Todes seiner Lieben, sich wieder mehr mit philosophisch-religiösen Gedanken beschäftigt hat. Sein Enkel William Young hat aus seinem handschriftlichen Nachlaß eine „Contemplatio philosophica" für einen beschränkten Leserkreis veröffentlicht[12]) und mitgeteilt, daß

[10]) Philosophical Transactions, XXXI, 1721, No. 367, S. 151, und No. 368, S. 204.

[11]) ebenda XXXII, 1723, No. 376, S. 291.

[12]) Der Titel dieses Privatdruckes lautet folgendermaßen:

Not Published.

CONTEMPLATIO PHILOSOPHICA:
A POSTHUMOUS WORK,
OF THE LATE
BROOK TAYLOR, L.L.D. F.R.S.
SOME TIME SECRETARY OF THE ROYAL SOCIETY
TO WHICH IS PREFIXED
A LIFE OF THE AUTHOR,
BY HIS GRANDSON,
SIR WILLIAM YOUNG, BART. F.R.S. A.S.S.
WITH
AN APPENDIX
CONTAINING
Sundry original Papers, Letters from the Count Raymond de Montmort, Lord Bolingbroke, Marcilly de Villette, Bernouilli, etc.

Est unum perfugium doctrina ac literae, quibus semper usi sumus: quae secundis rebus dilectationem modo habere videbantur; nunc, etiam salutem. Ciceron. Epist. 12. Lib. 6.

LONDON:
PRINTED BY W. BULMER AND CO.
Shakspeare Printing-Office,
1793

(Vgl. den Anhang B und das III. Kapitel.)

dies Fragment den Anfang eines größeren geplanten, aber nicht zu Ende geführten Werkes aus den letzten Lebensjahren seines Großvaters bilde. Taylor starb am 29. Dezember 1731 in Somerset House und wurde auf dem St. Anne's Friedhof in Soho begraben. —

Die vorstehenden Angaben sind großenteils der biographischen Skizze entnommen, die Young seiner Veröffentlichung der „Contemplatio philosophica" beigegeben hat. Die Liste der Bücher und Aufsätze Taylors umfaßt alle, von denen ich habe feststellen können, daß sie im Druck erschienen sind. Nach der liebenswürdigen Mitteilung eines lebenden Verwandten Taylors, Herrn Ernest Taylor, Bourne Place, Bushey, befindet sich aber im Besitz der Royal Society in London noch ein größerer ungesichteter Nachlaß, der viele wissenschaftliche Briefe und auch Aufsatzentwürfe Brook Taylors enthält. Die Zeitverhältnisse gestatteten mir leider nicht, diesen Nachlaß, der wissenschaftsgeschichtlich sehr interessant sein dürfte, selbst noch näher zu untersuchen.

II. Kapitel.

Die mathematischen Leistungen Taylors und ihr Verhältnis zu den Entdeckungen von Leibniz und Joh. Bernoulli.

1.

Die mathematikgeschichtliche Bedeutung Taylors beruht fast ausschließlich auf seinem Buche über die „Methodus incrementorum." Über dieses Buch, seine Entstehung, seinen Inhalt und seine Bedeutung muß ich daher jetzt vor allem ausführlich berichten.

Zunächst eine bibliographische Vorbemerkung. Das Buch umfaßt in der ersten Auflage, London 1715, VI +118 Seiten in Kleinfolio[13]). 1717 folgte eine zweite Auflage des Buches. 1862 gab der Verlag Friedländer, Berlin, einen Facsimiledruck nach der Auflage von 1717 heraus. Von dieser sagt Cantor, sie sei „eine sogenannte Titelausgabe", bei der nur „ein neues Titelblatt gedruckt" sei, und schließt daraus auf einen wenig befriedigenden Absatz des Buches[14]). Diese Behauptung ist nur teilweise richtig. Durch genauen Vergleich eines Exemplares von 1715 aus dem Besitz der Bayerischen Staatsbibliothek in München mit einem von 1717 aus dem Besitz der Universitätsbibliothek in Heidelberg konnte ich feststellen, daß die Druckbogen A bis Gg der Auflage von 1715 (= S. V, VI u. 1—118) im Jahre 1717 tatsächlich unverändert weiterbenutzt worden sind, daß aber außer dem Titel S. I auch die Widmung S. III neu gedruckt und am Schlusse eine Seite mit wichtigen „Corrigenda et Addenda" hinzugefügt ist. Der Neudruck des Titels und der Widmung ist leicht erkenntlich. Bei der Ausgabe von 1717 fehlt auf dem Titelblatt nach L. L. D. das &; ferner ist eine andere Vignette verwandt und der Drucker- vor dem Verlegernamen weggelassen (LONDINI Impensis Gulielmi Innys ad Insignia Principis in Cœmetrio D. Pauli MDCCXVII, während es bei der ersten Auflage heißt: LONDINI Typis Pearsonianis: Prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Cœmetrio Paulino, MDCCXV). Auf dem nächsten Blatte, das die Widmung enthält, ist in der sechsten Zeile (Ad Philosophiam Promovendam) in der Ausgabe von 1717 das Wort PHILOSOPHIAM in großen Buchstaben und gesperrt gedruckt. Dagegen stimmen die beiden Seiten der Vorrede (LECTORI) und die Seiten 1—118 des Textes in den Auflagen von 1715 und 1717 vollkommen überein, in allen Buchstaben, Zwischenräumen,

[13]) Nicht in Quart, wie gewöhnlich wegen des kleinen Formats geschrieben wird (z. B. Cantor, Vorl. III², S. 378).

[14]) ebenda Anm. 3.

Zeilen und Seitenenden. Auch die erkannten Druckfehler sind 1717 nicht verbessert, sondern im Fehlerverzeichnis zusammengestellt. Die Auflage von 1717 ist also zweifellos in der Hauptsache nicht neu gedruckt. Aber obwohl sie demnach noch nicht vergriffen war, glaube ich doch nicht, daß der einzige Grund zur Veranstaltung einer Ausgabe mit neuer Jahreszahl, wie Cantor meint, in dem „wenig befriedigenden Absatz des Buches" zu sehen ist. Ein zweiter, und vielleicht der Hauptgrund war vielmehr Taylors Wunsch, die Berichtigungen und Zusätze, die ihm damals nötig erschienen, bekannt zu machen [15]). —

Die allgemeine Aufgabe, die Taylor sich bei seiner „Methode der Zuwächse" gestellt hat, ist: Newtons infinitesimale Fluxionsrechnung in neuer Weise zu begründen und verständlich zu machen, indem er zunächst die endlichen „Zuwächse" (incrementa) und „Abnahmen" (decrementa) veränderlicher Größen systematisch untersucht und erst nachträglich die Größenveränderungen gleich Null werden oder „verschwinden" läßt (evanescere). Außerdem will er nach dieser Methode der endlichen Veränderungen einige neue Sätze besonders über Reihenentwicklungen ableiten und mehrere Einzelprobleme, z. B. über die schwingende Saite und den Schwingungsmittelpunkt hängender Körper, lösen.

Bei meinem nun folgenden Gesamtbericht über den Inhalt des Taylorschen Hauptwerkes stütze ich mich außer auf dieses selbst besonders auf die eigene Darstellung (Account by the Author), die Taylor davon in den Philosophical Transactions der Royal Society gegeben hat [16]). Denn dieser bisher unbeachtet gebliebene Selbstbericht des Verfassers läßt am besten erkennen, worauf es ihm besonders ankam, und was er als seine eigene, über die Vorgänger hinausführende Leistung betrachtete.

Zur Ergänzung benutze ich auch eine Rezension des Buches, die 1717 in der Bibliothèque Angloise in Amsterdam ohne Verfassernamen erschienen ist [17]). Diese stimmt zwar inhaltlich weitgehend mit der vorigen überein, macht aber einige interessante Zusätze wegen der inzwischen erfolgten Angriffe auf die Selbständigkeit Taylors. Nik. Bernoulli nimmt in seinem Aufsatz: „Responsio ad Taylori querelas" an, diese Rezension stamme auch vom Verfasser selbst [18]). Es ist allerdings ebenso gut möglich, daß sie von einem Freunde Taylors geschrieben ist; doch muß Taylor selbst mindestens einige persönliche Angaben dazu beigesteuert haben. Jedenfalls können wir auch sie als authentische Darstellung der Ansicht Taylors und seines Kreises über die Bedeutung seiner mathematischen Arbeiten betrachten.

In der Einleitung der letzteren Rezension vom Jahre 1717 wird die „Methode der Inkremente" mit der „Methode der Differenzen" verglichen, die Leibniz benutzt habe, um „daraus die Haupteigen-

[15]) Eine spätere Berichtigung zum 25. Satze (S. 100) gab Taylor in den Philosophical Transactions, Vol. XXIX, S. 339, als Anhang zu seinem Selbstbericht über die „Methodus incrementorum".

[16]) Vgl. S. 4 im I. Kapitel.

[17]) Article X, S. 525 ff.

[18]) Acta erud. Lips. 1720, p. 279.

tümlichkeiten der Fluxionsmethode abzuleiten" und mit geändertem Namen zu veröffentlichen, wie wenn sie von ihm erfunden wären. Leibnizens Methode sei aber „weniger allgemein" als die Taylors. Sie handle nämlich von Differenzen, d. h. von Abweichungen je zweier verschiedenen (different) Größen voneinander. Taylor dagegen wähle den Ausdruck „Inkrement" und gebe damit deutlich zu erkennen, daß es sich um das Wachstum je einer einzigen veränderlichen Größe handle, das er „durch die beständige und fortgesetzte (continuelle et successive) Addition der Teile, die er Inkremente nenne, hervorgebracht" werden lasse.

Mit dem im ersten Satze dieser Ausführungen enthaltenen Vorwurf gegen Leibniz, daß er einen versteckten geistigen Diebstahl an Newton begangen habe, brauchen wir uns hier nicht weiter zu beschäftigen, zumal dieser Vorwurf längst als unberechtigt erkannt worden ist. Wohl aber werden wir später (im 4. Abschnitt) noch genauer nachzuprüfen haben, ob, wie hier außerdem behauptet wird, die Leibnizschen „Differenzen" wirklich etwas anderes als die Taylorschen „Inkremente" sind und Taylor eine neue, allgemeinere Methode als Leibniz begründet hat.

In der Einleitung des Selbstberichtes vom Jahre 1716 spricht Taylor erheblich genauer vom Wesen seiner neuen Methode und ihrem Verhältnis zur Newtonschen Fluxionsmethode, die „mit Recht ihrem großen Erfinder so viel Ruhm gebracht habe". Hier erklärt er ausdrücklich, nur dadurch, daß er „das Wesen (the Nature) der Methode der Fluxionen gründlich betrachtet habe, sei er nach und nach (by degrees) auf die Methode der Inkremente verfallen". Denn die Grundlage der Fluxionsmethode ist, wie er weiter sagt, daß die Fluxionen der Größen proportional den werdenden (nascent) oder vergehenden Inkrementen dieser Größen sind. Um diese Methode gründlich zu verstehen, ist es also nötig, die Eigenschaften der Inkremente im allgemeinen sorgfältig zu betrachten. Und auf Grund dieser Eigenschaften ist es leicht, eine vollkommene Einsicht in die Fluxionsmethode zu gewinnen.

Taylor betrachtet zu diesem Zwecke die Größen als gebildet durch fortgesetzte Addition von Teilen endlichen Betrages; diese Teile nennt er die Inkremente, d. h. die Zuwächse der Größen, da diese durch Addition jener „wachsen". Jene Teile sollen wieder in derselben Weise betrachtet werden, als gebildet durch fortgesetzte Addition anderer Teile, der zweiten Inkremente, usw. Wenn z. B. x irgend eine Zahl in der Reihe:

0 1 4 10 20 35 usw. bedeutet,

die durch fortgesetzte Addition von:

1 3 6 10 15 usw. gebildet ist,

so nennt Taylor die Zahlen der zweiten Reihe die Inkremente der ersten Reihe und bezeichnet sie mit $\dot{x}$. Die zweite ist abermals durch fortgesetzte Addition von:

1 2 3 4 5 usw. gebildet; diese Zahlen

werden dann die zweiten Inkremente von x oder ersten Inkremente von $\dot{x}$ genannt und mit $\ddot{x}$ bezeichnet, usw. Jede Reihe entsteht offen-

bar aus der vorhergehenden durch Bildung der Differenzen je zweier benachbarten Zahlen.

In der Gesamtmethode sind zwei einander entgegengesetzte Teile zu unterscheiden: Der eine lehrt, die Relationen der Inkremente von veränderlichen Größen aus den Relationen der Größen selbst zu finden; der andere hat die Aufgabe, die Relationen der ganzen Größen (Integral Quantities) selbst, befreit von der Betrachtung ihrer Teile, der Inkremente, aus den Relationen der Inkremente zu bestimmen, sowohl wenn diese allein, als wenn sie verbunden mit ihren Integralgrößen gegeben sind.

In alledem zeigt sich ein vollständiger Parallelismus zwischen der Inkrementen- und Fluxionsmethode. Freilich werden in der letzteren nicht die Teile der veränderlichen Größen, sondern die Geschwindigkeiten ihrer Veränderung betrachtet (oder genauer die Bewegungsgrößen im Falle, daß die bewegenden oder das Fließen erzeugenden Größen gleich bleiben; denn nur in diesem Falle sind die Fluxionen den Geschwindigkeiten proportional). Im übrigen aber ist alles genau entsprechend: Es gibt auch hier zweite, dritte usw. Fluxionen. Und auch hier besteht die Gesamtmethode aus zwei entgegengesetzten Teilen: 1. Die Fluxionen aus den Fluenten, den fließenden Größen zu finden und 2. umgekehrt die Fluenten, befreit von den Fluxionen, aus den Relationen der Fluxionen zu bestimmen, sowohl wenn diese mit ihren Fluenten verbunden, als wenn sie allein gegeben sind.

Ja, der Zusammenhang zwischen den beiden Methoden ist sogar noch enger. Denn die Grundsätze der Fluxionsmethode können alle unmittelbar als Folgerungen aus den Grundsätzen der Inkrementenmethode gewonnen werden. Taylor beruft sich dafür auf zwei Stellen bei Newton selbst (in der Sectio I seines Hauptwerkes: „Philosophiae naturalis principia mathematica", und am Anfang der Abhandlung: „De Quadratura Curvarum"), wo dieser gezeigt habe, daß die Fluxionen proportional ihren werdenden und verschwindenden Inkrementen seien; wenn man also in einem Satze, der sich auf Inkremente beziehe, die Inkremente verschwinden oder gleich Null werden lasse und für ihre Verhältnisse die Fluxionen setze, so erhalte man einen Satz, der in der Fluxionsmethode richtig sei; es sei daher zulässig und zum gründlichen Verständnis der Fluxionsmethode wünschenswert, sie mit der Inkrementenmethode zusammen zu behandeln, wie wenn beide nur eine einzige Methode bildeten.

Taylor verteidigt Newton bei dieser Gelegenheit gegen den Vorwurf, daß er in die Mathematik unendlich kleine Größen als vermeintlich reale Dinge eingeführt habe; in Wirklichkeit betrachtet Newton die ersten und letzten Verhältnisse von Größen genau in dem Augenblicke, wo sie beginnen oder vergehen, nicht etwa eine unendlich kleine Zeit nach ihrem Anfang oder vor ihrem Ende; im ersten und letzten Augenblick aber, in dem die Fluxionen bestimmt werden, sind die entstehenden oder verschwindenden Größen nicht unendlich klein, sondern wirklich Nichts; und der Beweis dieser Methode aus den Grundsätzen der Inkrementenmethode erfolgt ebenso

wie der antike Beweis der Exhaustionsmethode durch eine „deductio ad absurdum", d. h. durch den Nachweis, daß die Annahme einer von 0 verschiedenen Abweichung auf einen Widerspruch führt.

Soviel zur allgemeinen Charakteristik der Inkrementenmethode und ihres Verhältnisses zur Fluxionsmethode nach Taylors eigener Auffassung. Nun zum Einzelinhalt des Taylorschen Buches. Es besteht aus zwei Teilen, deren erster die Grundsätze dieser beiden Methoden entwickelt, während der zweite ihre Nützlichkeit durch Anwendung auf mathematische und physikalische Beispiele zeigt.

Zu Beginn des ersten Teiles gibt Taylor auch eine Übersicht über seine Bezeichnungsweise. Wie Newton bezeichnet er die 1., 2., 3. Fluxion einer veränderlichen Größe x durch übergesetzte Punkte $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ und die Fluenten eines zusammengesetzten Ausdruckes durch ein umschließendes Parallelogramm $\boxed{xz^2}$. Dagegen bezeichnet er die 1. und 2. Fluente einer einzelnen Größe durch übergesetzte Strichelchen in Form von accentus acuti: $\acute{x}$, $\acute{\acute{x}}$. Außerdem gibt es noch eine gemeinsame Bezeichnungsweise aller Fluxionen und Fluenten durch übergesetzte positive und negative Zahlen: $\overset{n}{x}$, $\overset{n-1}{x}$, ... $\overset{2}{x} = \ddot{x}$, $\overset{1}{x} = \dot{x}$, $\overset{0}{x} = x$, $\overset{-1}{x} = \acute{x}$, $\overset{-2}{x} = \acute{\acute{x}}$, . . . $\overset{-n}{x}$. Analog werden die endlichen Inkremente durch untergesetzte Punkte oder Zahlen bezeichnet: $\underset{3}{x}$, $\underset{n}{x}$, $\underset{0}{x} = x$, . . . x; auch hier bedeutet $\underset{0}{x}$ dasselbe wie x selbst oder die Integralgröße, und $\underset{-1}{x}$, $\underset{-2}{x}$, . . . $\underset{-n}{x}$ die Größen, deren 1., 2., . . . n Inkremente = x sind. Völlig abweichend aber ist die Bedeutung der über- und untergesetzten Strichelchen in Form von accentus graves: $\grave{\grave{x}}$, $\grave{x}$, x, $\underset{\backprime}{x}$, $\underset{\backprime\backprime}{x}$ bedeuten fünf aufeinander folgende Werte einer durch Addition von Inkrementen wachsenden oder durch Subtraktion von Dekrementen abnehmenden Größe x, und zwar $\underset{\backprime\backprime}{x}$ und $\underset{\backprime}{x}$ die beiden nächst größeren, $\grave{x}$ und $\grave{\grave{x}}$ die beiden nächst kleineren Werte[19]).

Im ersten Satz des Buches setzt Taylor die direkte Methode der Inkremente und der Fluxionen auseinander, d. h. er zeigt, wie man aus einer Gleichung mit veränderlichen und unveränderlichen Größen die zugehörige Inkrementen- und Fluxionsgleichung finden kann. Dabei übernimmt er einfach die Newtonsche Regel aus der „Quadratura Curvarum" im Wortlaute. Der zweite Satz zeigt, wie man eine Gleichung mit Integralgrößen und ihren Inkrementen oder eine Gleichung mit Fluenten und Fluxionen in eine andere transformieren kann, deren Größen in umgekehrter Richtung wachsen oder abnehmen (x = d — v). Der dritte Satz lehrt, eine Fluxionsgleichung mit der ungleichmäßig fließenden Größe x so zu transformieren, daß x gleichmäßig fließt, d. h. in der heutigen Ausdrucksweise, die unabhängige und die abhängige Veränderliche

[19]) Es besteht also keine Analogie zwischen den accentus graves und acuti: $\overset{-1}{\grave{x}} = x$, aber $\overset{-1}{\acute{x}} \neq x$. Cantors Darstellung (Vorl. III², S. 379) ist in diesem Punkte falsch.

miteinander zu vertauschen[20]). Taylor weist in seinem Selbstbericht darauf hin, daß dieser Satz von großer Bedeutung für die inverse Methode sei, und fügt noch hinzu, Newton und Moivre hätten die Transformation durch die Umkehrung von Reihen ausgeführt, er halte es aber für das natürliche Verfahren, sie direkt zu vollziehen.

Der vierte und fünfte Satz handeln von der Art und Zahl der Nebenbedingungen (conditions), die einer Inkrementen- oder Fluxionsgleichung auferlegt werden können. Sowohl in Taylors Selbstbericht wie in der Rezension der Bibliothèque Angloise wird hervorgehoben, daß bisher noch niemand dieses Problem hinreichend beachtet habe. In der Tat hat Taylor hier wohl zum ersten Mal (wie wir sagen würden) die Integrationskonstanten und ihre Bestimmung systematisch behandelt. Im Selbstbericht gibt er von den beiden „etwas verwickelten Sätzen" eine ausführliche Erklärung, deren Hauptinhalt der folgende ist: Wenn z eine gleichmäßig, x eine ungleichmäßig veränderliche Größe ist[21]), zwischen denen eine Inkrementengleichung besteht, z. B. die folgende (von dritter Ordnung): $\dddot{x} + z = x$, und die Aufgabe gestellt wird, die verschiedenen Werte von x durch die von z auszudrücken, so darf man noch drei Nebenbedingungen hinzufügen (allgemein bei einer Inkrementengleichung n-ter Ordnung noch n Nebenbedingungen), und man muß es auch, wenn die Zuordnung der Werte von x und z vollkommen bestimmt sein soll. In unserem Beispiel kann man verlangen, daß zu einem gewissen Werte von z, etwa dem Anfangswerte a, bestimmte Werte von x, $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ gehören, etwa c, ç und $\dot{ç}$. Dann ist alles Weitere eindeutig festgelegt. Zum zweiten Werte von $z = a + \dot{z}$ (wobei $\dot{z}$ das gegebene konstante Inkrement von z ist) gehört dann als zweiter Wert von x die Summe der Anfangswerte von x und $\dot{x}$, also $c + ç$; ebenso ist der zweite Wert von $\dot{x}$ gleich $ç + \dot{ç}$. Der zweite Wert von $\ddot{x} = ç + \dot{ç}$ aber ergibt sich $= \dot{ç} + c - a$, da (nach der Inkrementengleichung) $ç = c - a$ ist. Da ferner nach derselben Gleichung überhaupt jeder Wert von $\ddot{x}$ gleich der Differenz der zugehörigen Werte von x und z, also der zweite Wert von $\ddot{x} = (c + ç) - (a + \dot{z})$ ist usw., so ist es weder nötig noch möglich, mehr als die drei gegebenen Nebenbedingungen zu stellen, um die zweiten Werte von $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ zu bestimmen, sondern diese sind durch jene schon mit festgesetzt; und Ähnliches gilt für die zweiten Werte von x, x usw. Analog ergibt sich der zu $z = a + 2\dot{z}$ gehörige dritte Wert von x, wenn man die eben berechneten zweiten Werte von x und $\dot{x}$ addiert[22]); der dritte Wert von x ist also $= (c + ç) + (ç + \dot{ç}) = c + 2ç + \dot{ç}$; entsprechend ist der dritte Wert von $\dot{x}$

$= (ç + \dot{ç}) + (\dot{ç} + c - a) = ç + 2\dot{ç} + c - a$;

[20]) Ich verweise auf die eingehende Darstellung des 3. Satzes bei Cantor, Vorl. III², S. 379—381.

[21]) Bei der Übertragung auf die Infinitesimalrechnung ist Taylors z die unabhängige, x die abhängige Veränderliche; heute ist die umgekehrte Wahl der Buchstaben üblich.

[22]) Wenn man diesen Gedankengang für Inkrementengleichungen immer höherer Ordnung durchführt, so gelangt man zu der nach Taylor benannten Reihenentwicklung, wie er selbst sie im 7. Satze abgeleitet hat.

ebenso ist der dritte Wert von $\dot{x}$
$= (\dot{c} + c - a) + (c + \dot{c} - a - \dot{z}) = \dot{c} + \dot{c} + 2c - 2a - \dot{z}$; der dritte Wert von $\ddot{x}$ aber ist wieder gleich der Differenz der dritten Werte von x und $z = (c + 2\dot{c} + \ddot{c}) - (a + 2\dot{z})$ usw. Auf diese Weise ergibt sich die Anzahl der möglichen und zur vollkommenen Bestimmung erforderlichen Nebenbedingungen bei einer Inkrementengleichung n-ter Ordnung notwendig gleich n.

Hinsichtlich der Art der Nebenbedingungen aber bestehen auch noch andere Möglichkeiten als die eben gewählten. Taylor gibt als zweites Beispiel die Fluxionsgleichung (zweiter Ordnung): $az^2 + x^2\ddot{x} = 0$. Hier ist es nicht nur zulässig, die zu einem bestimmten Werte von z gehörigen Werte von x und $\dot{x}$ vorzuschreiben, d. h. bei geometrischer Darstellung zu fordern, daß die Kurve durch einen bestimmten Punkt geht und in ihm eine bestimmte Tangentenrichtung hat, sondern man kann statt dessen auch die zu zwei verschiedenen Werten von z gehörigen Werte von x vorschreiben, d. h. zwei verschiedene Kurvenpunkte festlegen.

Jedenfalls aber ist es, wie Taylor zum Schluß seines Selbstberichtes über den 4. und 5. Satz betont, „unerläßlich, sorgfältig auf die Erfüllung der Nebenbedingungen zu achten, um spezielle Probleme in der inversen Methode vollkommen zu lösen"; er weist insbesondere auf seine dementsprechende Lösung des Problems des Isoperimeters und der Kettenlinie in den Sätzen 17 und 18 hin.

Der sechste Satz enthält die allgemeine Erklärung der schon im 3.—5. Satz vorbereiteten inversen Inkrementen- und Fluxionsmethode, d. h. der Lösung des Problems: Wenn für gewisse veränderliche Größen Beziehungen zwischen ihren Inkrementen oder Fluxionen, mit oder ohne Hinzunahme der Größen selbst, gegeben sind, die Beziehungen zwischen den „Integralen oder Fluenten" zu finden, befreit von ihren Inkrementen oder Fluxionen, d. h. in heutiger Ausdrucksweise: Differenzen- oder Differentialgleichungen zu integrieren. Die Anweisung, um die Lösung dieses Problems in endlichen Ausdrücken (finite Terms) zu finden, ist, wie Taylor in seinem Selbstbericht hervorhebt, nur „versuchend" (tentative). Man muß in jedem einzelnen Fall „probieren", ob es einen endlichen Ausdruck gibt, dessen Inkremente oder Fluxionen die gegebene Gleichung befriedigen; eine allgemeine Regel, hierüber zu entscheiden, ist ihm nicht bekannt. Er empfiehlt daher, die Inkremente und Fluxionen möglichst vieler Integrale und Fluenten zu bilden und tabellarisch zusammenzustellen, und gibt auch selbst eine solche, freilich nur beschränkte, Tabelle, die dann in umgekehrter Richtung bei der Integration benutzt werden kann.

Zur allgemeinen Lösung des inversen Problems muß man sich der unendlichen Reihen bedienen. Wenn diese an einer bestimmten Stelle abbrechen [23]) oder wenn man sie sonstwie auf endliche Ausdrücke zurückführen kann [24]), so ergeben sie die „wahrhaft ma-

[23]) z. B. die Taylorschen Reihen ganzer Funktionen n-ten Grades, deren Ableitungen von der $(n + 1)$ ten Stelle an $= 0$ werden.

[24]) z. B. wenn man sie als übereinstimmend mit schon bekannten unendlichen Reihen, etwa für Wurzelausdrücke, erkennt.

thematischen Lösungen", wie wir sie „immer erhoffen"; im andern Falle führen sie zu „mechanischen Lösungen" und bloßen „Annäherungen [25])."

Wegen dieser Bedeutung der Reihen für das inverse Problem wird dann im siebten Satze gezeigt, wie man eine wachsende oder abnehmende Größe durch eine unendliche Reihe darstellen kann, deren aufeinanderfolgende Glieder von jener Größe sowie von ihren verschiedenen Inkrementen oder Fluxionen je nur den Wert zu einer bestimmten Zeit (z. B. je den Anfangswert) enthalten. In diesem Satze wird also die berühmte Taylorsche Reihenentwicklung gegeben. Auf den Beweis, der wie bereits erwähnt [22]), auf der Weiterführung eines schon im 4. Satze benutzten Gedankenganges beruht, müssen wir später (im 4. Abschnitt) noch ausführlich zurückkommen.

Im Anschluß daran wird im achten Satz gezeigt, wie die Lösung einer gegebenen Inkrementen- oder Fluxionsgleichung in Form einer unendlichen Reihe gefunden werden kann. Wenn die Gleichung Inkremente oder Fluxionen bis zu den n-ten enthält, so ersetzt man mit ihrer Hilfe in der unendlichen Reihe des vorigen Satzes das n-te Inkrement oder die n-te Fluxion sowie alle folgenden durch frühere. Auf diese Weise erhält man eine unendliche Reihe, in der noch n „unbestimmte Koeffizienten" sind, nämlich (in der Bezeichnungsweise des 4. Satzes) c, ç, ç, . . . c_n . Es besteht also die Möglichkeit, durch die bestimmte Wahl dieser Koeffizienten die n Nebenbedingungen zu erfüllen, die im 4. Satz als nötig erkannt worden sind.

Taylor hebt in seinem Selbstbericht nachdrücklich hervor, daß er hiermit „die einzige natürliche (genuine) und allgemeine Lösung" der inversen Probleme gegeben habe. Denn auf diese Weise erhalte man ganz von selbst auch die nötigen unbestimmten Koeffizienten. Alle anderen Methoden dagegen seien in der Hinsicht unvollkommen, und speziell die (im neunten Satze dargestellte) Newtonsche Methode der Reihenbildung durch ein Lineal und Parallelogramme [26]) leide sehr unter der Schwierigkeit der Erfüllung der Nebenbedingungen.

Nach diesen Ausführungen läßt sich die bisher [27]) herrschende Ansicht, Taylor habe die später nach ihm benannte Reihenentwicklung noch nicht in ihrer großen Bedeutung zu würdigen und voll auszunutzen verstanden, nicht mehr ganz aufrecht erhalten. Die allgemeine Lösung des Integrationsproblems mit Hilfe dieser Reihe bildet vielmehr den eigentlichen Höhepunkt seines Buches, sowohl der gan-

---

[25]) Solutio vere Mathematica in terminis numero finitis . . . solutio Mechanica . . . per approximationes (Methodus incrementorum, 1715, p. 19). Solutions which we always hope for (Account by the Author, 1716).

[26]) Vgl. Cantor, Vorl. III², S. 107—109, 431, 593/4.

[27]) H. Weißenborn, Die Principien der höheren Analysis, Halle 1856, S. 152; Cantor, Vorl. III², S. 382, 409 (an der letzten Stelle wird behauptet, in einem algebraischen Aufsatze des Jahres 1717 habe Taylor „die erste Anwendung seiner Reihe gemacht"); H. Wieleitner, Gesch. d. Math. II. Teil, 1. Hälfte, Leipzig 1911, S. 149.

zen Anlage nach (denn schon der 4. und 5. Satz dienen der Vorbereitung des 7. und 8.), wie auch nach seinen wiederholten eigenen Erklärungen. In einer Hinsicht allerdings hat Taylor die Tragweite seiner Entdeckung doch noch nicht voll erkannt. Er war zwar überzeugt, durch seine Reihe Funktionen, die durch Differentialgleichungen definiert sind, besser darstellen zu können, als alle früheren Mathematiker, selbst Newton; aber er hielt die Darstellung in unendlichen Reihen überhaupt nicht recht für befriedigend. Am liebsten hätte er sie nur als Hilfsmittel gebraucht, um schließlich doch wieder zu endlichen Ausdrücken zu gelangen, die ihm allein „wahrhaft mathematisch" schienen. Andernfalls ließ er sie höchstens notgedrungen in Ermangelung eines besseren als Approximationen gelten. Die von Leibniz vertretene, später allgemein gewordene Auffassung, daß man Funktionen völlig exakt durch unendliche Reihen darstellen könne, wenn nur deren Konvergenz streng erwiesen sei, lag Taylor noch fern.

Der zehnte bis zwölfte Satz, die den ersten Teil des Buches schließen, handeln von einem speziellen beachtenswerten Fall des im 6. bis 8. Satz allgemein gelösten inversen Problems, wenn nämlich in der Gleichung, die intregriert werden soll, nur ein besonderes Inkrement oder eine besondere Fluxion, nicht vermischt mit niederen oder höheren Inkrementen oder Fluxionen und auch nicht mit dem Integral oder der Fluente selbst, vorkommt. Dieser spezielle Fall wird im zehnten Satz zunächst im allgemeinen behandelt, und es wird hervorgehoben, daß auch hier die Lösung in endlichen Ausdrücken nur durch Versuch gefunden werden könne und, wenn das nicht glücke, wieder wie im 8. Satze eine unendliche Reihe zu Hilfe gezogen werden müsse. Im 11. und 12. Satze wird gezeigt, wie solche unendlichen Reihen in einigen Einzelfällen bequem gebildet werden können. Für die im 11. Satz abgeleitete Reihenentwicklung hat, wie ich später noch genauer berichten werde, Johann Bernoulli die Priorität in Anspruch genommen, und Leibniz hat sie auf die im 7. Satze abgeleitete Reihenentwicklung zurückgeführt. Taylor legt auf sie in seinem Selbstbericht kein besonderes Gewicht, sondern schreibt ihr nur einen sehr speziellen Anwendungsbereich zu.

Der zweite Teil des Buches enthält Anwendungen der allgemeinen Methode auf bestimmte Einzelprobleme. Der dreizehnte Satz wendet die Inkrementenmethode auf die Interpolation und die Fortsetzung von Reihen an. Er stimmt, wie Taylor in seinem Selbstbericht sagt, fast ganz mit Newtons Differentialmethode im Falle äquidistanter Ordinaten überein. Auch Newtons Reihe der Binomialpotenzen wird hier als Beispiel abgeleitet. Der vierzehnte Satz zeigt, wie die Inkrementenmethode zum Summieren von arithmetischen Reihen gebraucht werden kann. Der fünfzehnte Satz wendet die direkte Fluxionsmethode auf geometrische Probleme an, z. B. auf die Bestimmung von Tangenten, Krümmungsradien, Wendepunkten usw. Der sechzehnte Satz benutzt entsprechend die inverse Fluxionsmethode zur Quadratur aller Arten von Kurven.

Im siebzehnten Satz wird speziell das Problem der iso-

perimetrischen Kurven allgemein gelöst. In seinem Selbstbericht fügt Taylor aber ausdrücklich hinzu, daß dieses „Problem des Isoperimeters schon von zwei berühmten Mathematikern, den Brüdern Bernoulli, behandelt worden" sei. Der 18. Satz gibt die allgemeine Lösung des Problems der Kettenlinie (Catenaria), wenn ihre Dicke sich nach einem gegebenen Gesetze ändert. Im neunzehnten Satz wird gezeigt, daß der Bogen (Fornix or Arch), der nur sein eigenes Gewicht trägt, mit der Kettenlinie übereinstimmt. Im zwanzigsten und einundzwanzigsten Satz handelt es sich um die Gestalt biegsamer Flächen (z. B. Laken), die mit dem Gewicht einer Flüssigkeit belastet sind. Der Rezensent in der Bibliothèque Angloise (1717) bemerkt dazu, diese beiden Aufgaben wie auch die 24. und 25. seien schon von anderen Mathematikern gelöst worden; aber der Verfasser habe sie in besonderer Weise behandelt und deshalb gemeint, eine Wiederholung werde nicht übel aufgenommen werden. (Auf diese für den Plagiatsstreit wichtige Stelle werde ich später noch einmal zurückkommen.)

Der zweiundzwanzigste und dreiundzwanzigste Satz handeln von der Bewegung der Saiten musikalischer Instrumente; der erstere gibt die Gestalt der Saite in jedem Augenblick der Schwingung, der letztere berechnet die Schwingungszahl aus Länge, Gewicht und Spannung. Sowohl in Taylors Selbstbericht wie in der Rezension der Bibliothèque Angloise wird hervorgehoben, daß diese beiden Sätze ganz neu seien, und daß der zweite ein bemerkenswertes Beispiel des Nutzens der (Newtonschen) Methode der ersten und letzten Verhältnisse gebe. In der Tat ist dies der erste Versuch einer infinitesimalmathematischen Behandlung der Saitenschwingungen, die bis dahin nur experimentell untersucht worden waren. In den Acta eruditorum des Jahres 1716 ist Taylors Lösung des Problems von Jakob Hermann als auf mehreren zweifelhaften Annahmen beruhend kritisiert und zu berichtigen versucht worden. In der Rezension der Bibliothèque Angloise wird diese Kritik aber als unberechtigt zurückgewiesen.

Der fünfundzwanzigste Satz lehrt den Schwingungsmittelpunkt (center of Oscillation) aller Körper zu finden, der sechsundzwanzigste desgleichen den Aufschlagsmittelpunkt (center of Percussion, d. h. den Punkt eines rotierenden Körpers, bei dessen Anstoß an einem Hindernis die ganze Bewegung zur Ruhe kommt). Taylor bemerkt dazu in seinem Selbstbericht, das zweite Problem werde zwar auf dieselbe Weise wie das vorhergehende gelöst, und deshalb glaube man allgemein, diese beiden Mittelpunkte seien identisch. Das sei aber falsch, denn der Schwingungsmittelpunkt könne nur ein Punkt sein, der Aufschlagsmittelpunkt aber könne irgendwo auf einer gewissen Linie liegen, die im 25. Satze bestimmt werde. Taylor berichtigt in seinem Selbstbericht bei dieser Gelegenheit noch einen Fehler, den er nachträglich im Buche bemerkt hat, nämlich die falsche Annahme, daß der Aufschlagsmittelpunkt in der Ebene des Schwerpunktes und senkrecht zur Rotationsachse liegen müsse.

Der sechsundzwanzigste Satz zeigt, wie man die Dichte

der Luft in irgend einem Abstand vom Erdmittelpunkt bestimmt, unter der Annahme, daß die Dichte dem Druck proportional ist. Der siebenundzwanzigste Satz endlich zeigt, wie man die Berechnung eines Lichtstrahls beim Durchgang durch die Atmosphäre berechnet unter der Annahme, daß das Licht ein Körper ist, und daß die Brechung von der Anziehung des Lichtstrahls durch die benachbarten Körper verursacht wird. In seinem Selbstbericht weist Taylor darauf hin, daß diese Schlußaufgabe noch einmal besonders gut die Nützlichkeit der Inkrementenmethode zeige; mit ihrer Hilfe würden hier nämlich die Koeffizienten einer Reihe bestimmt, die alle Fluenten und alle Fluxionen einer gewissen Größe entsprechend den Werten eines gewissen Symbols n ausdrücke. In der Tat ist erst an dieser Stelle wieder von endlichen Größenveränderungen die Rede, nachdem in den Sätzen 15 bis 26 ausschließlich die infinitesimale Fluxionsrechnung angewandt worden war. —

2.

Diesem Gesamtbericht über die „Methodus incrementorum", wie sie sich in Taylors Selbstauffassung und im Urteil der Bibliothèque Angloise darstellt, will ich jetzt die völlig abweichende Auffassung gegenüberstellen, die in den nächsten Jahren von deutschen Mathematikern über die Originalität Taylors und den Wert seiner Leistungen geäußert worden ist. Sie hat zu einem heftigen persönlichen Prioritäts-, ja Plagiatsstreit geführt, der schließlich unentschieden abgebrochen worden ist. Ich werde aber zum Schlusse eine sachliche Entscheidung in den Hauptstreitpunkten zu geben versuchen. —

Schon im Jahre 1716, nicht lange nach Taylors Selbstbericht, erschien auch in Deutschland eine Rezension[28]), deren Verfasser, wie üblich, ungenannt blieb. Es steht aber fest, daß sie nicht, wie Taylor vermutete, auf Johann Bernoullis Anregung zurückgeht, sondern von Leibniz selber stammt[29]). In dieser Rezension wird zunächst darauf hingewiesen, daß Leibniz bereits im Briefe an Heinrich Oldenburg vom 3. Februar 1673, der durch den Druck im Collinsschen Briefwechsel allgemein bekannt sei[30]), die Summen von wachsenden oder abnehmenden Reihen mit Hilfe ihrer ersten, zweiten und folgenden Differenzen zu finden gelehrt habe. Später habe er entdeckt, daß der Berechnung von Zahlendifferenzen und Summen in der Geometrie die Berechnung von Tangenten und Flächeninhalten ent-

[28]) Acta eruditorum, Lipsiae, Juli 1716, p. 292—296.

[29]) Im Briefe an Rémond de Montmort vom 5. Februar 1719 (hier im Anhang A, No. 14 abgedruckt) sagt Taylor: „I could not help believing, that he (= Joh. Bernoulli) was the occasion of that most injurious and unfair account of my book in the same Acta". Daß Leibniz der wirkliche Verfasser ist, wird durch seine erhaltene Handschrift bewiesen; vgl. Edg. Osw. Schlosser, Die Rezensionstätigkeit von Leibniz, Heidelberger Diss. 1934, S. 5 und 51. Schon im Briefe an Joh. Bernoulli vom 7. Juni 1716 hatte Leibniz sich über Taylors Buch ganz ähnlich wie in der Rezension geäußert; s. Math. Schriften, herausgegeben v. C. I. Gerhardt, Band III, 1855, S. 963.

[30]) Commercium Epistolicum Collins et aliorum de Analysi promota, Londini 1712, p. 32—37, 2. ed. Londini 1722, p. 108—114 = Leibnizens Math. Schr., herausgegeben v. C. I. Gerhardt, Bd. I, 1849, S. 27—31.

spreche, und habe auf diese Weise den Differential- oder Infinitesimalkalkül erfunden, dessen Nützlichkeit von Johann Bernoulli, dem Marquis de l'Hospital und anderen gezeigt, und der auch von den Engländern nachher unter dem Namen des Fluxionskalküls verbreitet worden sei (ex eo sub nomine Calculi Fluxionum est celebrata).

Taylor nun, so fährt die Rezension fort, geht den entgegengesetzten Weg: Er kehrt von den in England bekannteren (celebratioribus) Fluxionen zur allgemeinen Betrachtung der Differenzen zurück, führt aber den neuen Namen Inkremente dafür ein, der eigentlich zu speziell ist, denn Differenzen können nicht nur Inkremente, sondern auch Dekremente sein. Unendlich kleine Teile will er dann zwar nicht als wirklich vorhanden anerkennen, sondern nur die Verhältnisse der ersten entstehenden oder letzten verschwindenden Teile. Aber schließlich gibt er doch zu, daß man des leichteren Verständnisses halber auch unendlich kleine Teile einführen könne, und kehrt damit ganz zu den Leibnizschen Ausdrücken zurück (ad Leibnitianas expressiones se recipit). Er wendet nur andere Zeichen (notas) dafür an, nämlich unter- oder übergeschriebene Punkte (oder Zahlen) für die Differenzen, Akzente für die Summen.

Im Anschluß daran wird besonders moniert, daß Taylor die schöne Leibnizsche Analogie zwischen den höheren infinitesimalen Differenzen von Produkten und den Potenzen von Polynomen in den Miscellanea Berolinensia [31]), obwohl sie hierher gehöre, nicht beachtet oder übergangen habe; ferner daß er in dem ganzen Buch überhaupt keinen anderen Mathematiker als Newton nenne, abgesehen von einer beiläufigen Erwähnung des Cavalieri und Wallis in der Vorrede.

Es folgt dann die Besprechung der einzelnen Sätze der „Methodus incrementorum", wobei Leibniz einige Lücken aufweist, aber auch mehreres als wertvoll anerkennt, vor allem die Forderung von Inkremententafeln zur Erleichterung der Integration im Scholium des 6. Satzes und auch die allgemeinen Methoden der Reihenbildung in den Sätzen 7 ff. [32]), ohne daß er hierbei die Priorität für sich selbst oder Joh. Bernoulli beansprucht. Vom zweiten Teil des Buches, insbesondere vom 4. Beispiel des Satzes 15 sowie von den Sätzen 18 bis 26 sagt Leibniz, daß sie von den Erfindungen anderer, die besonders in den Acta eruditorum veröffentlicht seien, nicht abzuweichen schienen (non abludere videntur).

In dieser Rezension werden also Taylor zwar keine ausdrücklichen Plagiatsvorwürfe gemacht, aber es wird doch behauptet, daß sein Buch, abgesehen von den Sätzen über unendliche Reihen, wenig

---

[31]) Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, Math. Schr. Bd. V, S. 377—382, zuerst gedruckt im I. Bande der Berliner Akademieabhandlungen (Misc. Berol.) vom Jahre 1710. Schon in den Briefen an Joh. Bernoulli vom 6./16. Mai und 20./30. Oktober 1695 und an de l'Hospital vom 30. September 1695 hat Leibniz die Grundgedanken dieser Abhandlung entwickelt, ja sogar noch weiter (auf negative und gebrochene Exponenten) ausgedehnt (Math. Schr. Bd. III, S. 175, 221/2 und II, 301/2). Vgl. Cantor, Vorles. III², S. 230 u. 372.

[32]) „Interim quaedam theoremata generalia in series euntia exhibet autor, et in eam rem methodos praescribit, quae non videntur spernendae."

Neues bringe: Die allgemeine Methode der Inkremente stimme mit der Leibnizschen Differenzenrechnung überein, und die meisten Einzelprobleme Taylors seien schon früher von deutschen Mathematikern in allgemein bekannten Zeitschriftenaufsätzen gelöst worden. Ferner wird ausdrücklich getadelt, daß Taylor keinen von diesen seinen deutschen Vorgängern zitiere, sondern nur seinen Landsmann Newton, obwohl, wie die Rezension zwischen den Zeilen andeutet, der spezielle Inhalt des Buches jenen viel näher stehe als diesem.

Schärfere Vorwürfe gegen Taylor enthalten die Briefe Johann Bernoullis an Leibniz aus der gleichen Zeit [33]). Hier wird behauptet, es sei bei den Engländern allgemein Sitte, alles ihren Landsleuten zuzuschreiben, den Fremden aber nichts zu gönnen; und obwohl sie selbst die schamlosesten Plagiatoren seien, wagten sie doch noch, andere (z. B. Leibniz und Johann Bernoulli) dieses Verbrechens anzuklagen. Insbesondere wird Taylor von Johann Bernoulli beschuldigt, er habe die Lösung des isoperimetrischen Problems von seinem Bruder Jakob, die des Kettenlinien- und Tuchspannungsproblems von ihm selbst übernommen und mit der Berechnung des Schwingungszentrums ein Plagiat an seinem Aufsatze in den Acta eruditorum von 1714 begangen.

So grob hat Joh. Bernoulli sich in der Öffentlichkeit allerdings nicht geäußert. Aber sachlich dieselbe Anklage hat er doch in einem anonymen Aufsatze erhoben, der 1716 in den Acta eruditorum unmittelbar hinter der Leibnizschen Taylorrezension erschienen ist [34]). Der Aufsatz ist betitelt: „Epistola pro eminente mathematico Joh. Bernoullio contra quendam ex Anglia antagonistam scripta“ und enthält eine Verteidigung Joh. Bernoullis gegen Newtons Vorkämpfer John Keill, scheinbar von dritter Seite; in Wirklichkeit aber stammt, wie wir sehen werden, der Inhalt des Briefes doch von Bernoulli selbst [35]). Hier nun wird der Vorwurf des geistigen Diebstahls gegen Taylor und andere Engländer, wenn auch unter Vermeidung des Wortes, doch ganz unzweideutig erhoben: „Es ist nichts Neues bei gewissen Engländern, daß sie meinen, ihnen allein sei es erlaubt, sich die Erfindungen anderer ungestraft anzueignen, während sie sofort Menschen und Götter anrufen, wenn sie sehen oder vielmehr zu sehen glauben, daß Fremde an ihre Erfindungen die Hand legen. Beispiele finden sich bei Cheyne, Des Hayes, Taylor und anderen, die sich überall der Erfindungen Bernoullis und sonst Fremder bedienen, den Urheber aber entweder überhaupt nicht erwähnen oder ihn in der Vorrede nur undeutlich (ambigue) nennen, so daß aus dem Zusammenhang nicht ersichtlich ist, was sich auf ihn speziell bezieht.“

Gegen diese Beschuldigungen ist von englischer Seite zuerst Stel-

[33]) Vom 14. Juli und 22. August 1716, Leibniz, Math. Schr. Bd. III, 1855, S. 965 und 970 (im Anschluß an Leibnizens Brief vom 7. Juni 1716, erwähnt in Anmerkung 29).

[34]) Acta eruditorum, Juli 1716, S. 296 bis 315; die von Taylor handelnde Stelle steht auf S. 307.

[35]) Vgl. Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 177/78 mit Note *; Cantor, Vorl. III², 1901, S. 324.

lung genommen worden in der uns schon bekannten Rezension der „Methodus incrementorum" in der Bibliothèque Angloise vom Jahre 1717, die wahrscheinlich von einem Freunde des Verfassers mit Benutzung persönlicher Mitteilungen desselben geschrieben ist[36]). Hier wird zur Verteidigung des Verfassers folgendes angeführt. Wenn Taylor nicht ausdrücklich gesagt habe, daß einige Probleme seines Buches schon vorher von Bernoulli gelöst seien, so dürfe dieser[37]) ihn deshalb nicht gleich des Plagiats anklagen. Denn 1. der Leser dieses Buches werde gewiß nicht annehmen, daß der Verfasser den ganzen Inhalt als sein Eigentum ausgeben wolle; 2. die Mitteilung aller Quellen, aus denen der Verfasser geschöpft habe, könne nicht erwartet werden, besonders nicht, wenn diese so bekannt seien; 3. Bernoulli aber sei sogar von Taylor in seinem Selbstbericht über die „Methodus incrementorum" ausdrücklich erwähnt worden (s. oben im 1. Abschnitt S. 17), habe also nicht den geringsten Anlaß, sich zu beklagen; 4. Taylor habe sich im Buche ganz auf seinen Gegenstand beschränkt und absichtlich die Erwähnung der Arbeiten anderer unterlassen; denn sonst würde er auch die Fehler und Unvollkommenheiten dieser Arbeiten habe aufweisen müssen. Aus diesem Grunde habe er die früheren Lösungen des Problems nicht erwähnt. Denn Jakob Bernoullis Lösung des letzteren, der Taylor allerdings viel verdanke, habe den Fehler, sich auf besondere Fälle zu beschränken, obgleich das Problem allgemein gestellt sei. Und auch Joh. Bernoullis Lösung in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences 1706 enthalte 3 oder 4 erhebliche Fehler. Joh. Bernoulli müsse also Taylor dankbar sein, daß er diese fehlerhafte Lösung mit Stillschweigen übergangen habe. Endlich 5. bei der Berechnung des Schwingungszentrums habe die grundsätzliche Übereinstimmung der Lösungen Taylors und Joh. Bernoullis nicht erwähnt werden können, da die Lösung des letzteren in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences für 1714 erst 1717 in die Öffentlichkeit gekommen sei, während die „Methodus incrementorum" schon 1715 erschienen und das Manuskript des Buches sogar schon seit April 1714[38]) im Besitze der Royal Society gewesen sei.

Über diese Verteidigung Taylors und den in ihr enthaltenen Gegenangriff war Joh. Bernoulli natürlich empört. Aber er antwortete in der Öffentlichkeit doch zunächst verhältnismäßig zurückhaltend. In einem Aufsatze der Acta eruditorum vom Januar und Februar 1718[39]) über die vorhandenen Lösungen der isoperimetri-

[36]) S. o. S. 9/10. Die Stelle der Rezension, in der Taylor gegen den Plagiatsvorwurf verteidigt wird, ist wieder abgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, Lausanne und Genf 1742, Bd. II, S. 473/74.

[37]) Es wird also als selbstverständlich angenommen, daß der anonyme Verfasser der „Epistola pro eminente mathematico" Bernoulli selbst ist. Dieser war aber nicht damit einverstanden, als Verfasser erkannt zu sein, und wehrte sich durch seinen Sohn Nikolaus dagegen (s. S. 22).

[38]) In den Drucken steht zwar April 1713, aber das widerspricht der vorhergehenden Zeitangabe: ein Jahr vor dem Erscheinen des Buches, ferner der Angabe Taylors in seiner Apologia (s. S. 23/24).

[39]) De solutionibus, quae extant problematum isoperimetricorum, Acta erud. Lips. 1718, S. 15—31, 74—88, insbesondere S. 18; französische Übersetzung in den Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, Paris 1718, S. 100 ff., wieder-

schen Probleme gab er ein Versehen in seiner Lösung vom Jahre 1706 zu und ersetzte sie durch eine verbesserte. Taylors Leistung auf diesem Gebiete erkannte er an und nannte ihn einen „Geometra insignis et acutus" (oder „homme d'esprit, et Géomètre très-habile"), freilich mit dem zweideutigen Zusatze: „der in unsere (d. h. Jakob und Johann Bernoullis) tiefere Entdeckungen mit Glück eingedrungen ist, wie sein Buch über die Methodus incrementorum bezeugt". Taylor habe, so fügte Joh. Bernoulli noch hinzu, ebenso wie er selbst die langwierige Methode seines Bruders Jakob Bernoulli zu verkürzen gesucht; allerdings sei er dabei in eine solche Dunkelheit verfallen, daß selbst Sachkundige kaum in sie eindringen könnten.

In den Acta eruditorum vom Juni 1718 [40]) ließ Joh. Bernoulli ferner durch seinen Sohn Nikolaus (II) mitteilen, daß er die zu seiner Verteidigung geschriebene „Epistola pro eminente mathematico" nicht selbst verfaßt habe. Er habe lediglich einem Freunde [41]) auf dessen Anfrage die in der „Epistola" enthaltenen Tatsachen mitgeteilt. Dieser aber habe dem Brief die Fassung gegeben, in der er gedruckt sei, und habe ihm mehrere zu starke Ausdrücke eingefügt, die Joh. Bernoulli lieber ungedruckt gesehen hätte. Zum Beweis der Mitwirkung eines Redaktors wird besonders auf einen Formfehler hingewiesen (den die Gegner aber längst selber schadenfroh bemerkt hatten): Es sei einmal vergessen worden, „meam formulam" in „suam formulam" umzuändern [42]).

Auch als Taylor die deutschen Mathematiker um Neujahr 1718/9 durch die Stellung eines Problems herausforderte, das Leibniz für unlösbar erklärt habe [43]), verhielt sich Joh. Bernoulli noch immer auffallend milde; in einem Briefe vom Januar 1719 an ihren gemeinsamen Bekannten Montmort sprach er sogar Taylor seine Hochschätzung aus und bot ihm seine Freundschaft an, wobei er allerdings einige absonderliche Bedingungen stellte (s. im Anhang A, Nr. 13). Taylor aber wies in seiner Antwort nicht nur dies Freundschaftsangebot spöttisch zurück, weil es nach den vorhergegangenen Plagiatsvorwürfen reichlich spät komme, sondern sprudelte seinem Freund Montmort gegenüber alles heraus, was er gegen Bernoulli auf dem Herzen hatte, mit der ausdrücklichen Ermächtigung, alles an diesen selbst weiterzuschreiben (s. den langen Brief vom 5. Februar 1719 im

---

gedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 235 ff., insbesondere S. 237/8. Vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², 1901, S. 458.

[40]) Acta eruditorum Lips. 1718, 261/2, Appendix zu Nikolaus (II.) Bernoullis Aufsatz De trajectoriis, ebenda S. 248—261; letzterer ist in Johann Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 286/298, ohne Appendix wieder abgedruckt.

[41]) Der ungenannte „Freund" war Chr. Wolff; s. Cantor Vorl. Bd. III², 1901, S. 324/25. Der zugrundeliegende Brief von Johann (I.) Bernoulli an Chr. Wolff ist später von seinem Enkel Johann (III.) veröffentlicht worden. Man ersieht daraus, daß doch so gut wie der ganze Inhalt der „Epistola pro eminente mathematico" von Johann (I.) Bernoulli selbst stammt, während die redaktionellen Änderungen Wolffs unbedeutend sind.

[42]) Acta erud. Lips. 1716, S. 314. Die Engländer hatten hieraus gleich geschlossen, daß der wahre Verfasser Joh. Bernoulli selbst gewesen sei und hielten daran mit Recht auch nach dem Dementi fest; vgl. Newtons Brief an Keill vom 2. Mai 1718 (Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 185/6).

[43]) Vgl. Anhang A, Nr. 13 und 14 mit Anm. 141, 143, 148 und 150.

Anhang A, Nr. 14). Wenn Montmort das auch wohl nur teilweise getan hat, so war hiermit doch jedenfalls zwischen Taylor und Joh. Bernoulli die Brücke endgültig abgebrochen, und der Streit nahm jetzt auch in der Öffentlichkeit eine so grobe Form an, wie die Gegner sie sich bisher nur in privaten Äußerungen an Freunde erlaubt hatten.

Taylor hatte schon im letztgenannten Briefe angekündigt, daß er sich, wie es in diesem Briefe privatim geschehen war, auch einmal öffentlich mit Joh. Bernoulli auseinandersetzen wolle. Dies geschah in der „Apologia D. Brook Taylor contra V. C. J. Joh. Bernoullium", die, nachdem sie mehreren Freunden zur Prüfung vorgelegen hatte [44]), in den Philosophical Transactions 1719 gedruckt wurde [45]). Die Apologie wendet sich gegen die obenerwähnten Stellen 1. in der „Epistola pro eminente mathemathico" (1716), für die trotz des Abschwächungsversuches in Nikolaus (II.) Bernoullis Erklärung (1718) doch Joh. Bernoulli die volle Verantwortung zugeschrieben wird, und 2. in dem von diesem selbst veröffentlichten Isoperimeteraufsatze (1718). An beiden Stellen, sagt Taylor, werde er des Plagiats beschuldigt, als wenn er Erfindungen Bernoullis als seine eigenen in Anspruch genommen habe; das hätte aber durch bestimmte Beispiele bewiesen werden müssen, damit er sich verantworten könne. Gewiß habe er vielfach dieselben Probleme wie andere Mathematiker bearbeitet, aber keineswegs die Erfindungen anderer als die seinigen ausgegeben. Er habe sich auch immer, ausgenommen beim Isoperimeterproblem, stets einer eigenen Analysis bedient. Die allgemeine Methode freilich verdanke er anderen, und vielleicht wäre es gut gewesen, wenn er sein Buch mit berühmten Namen wie Huygens, de l'Hospital, Varignon, Leibniz geschmückt hätte. Aber er sei so mit den Sachen selbst beschäftigt gewesen, daß er die Geschichte der Sachen vernachlässigt habe.

Hinsichtlich der drei Probleme, die er mit Joh. Bernoulli gemeinsam habe: der Kettenlinie, des Schwingungsmittelpunkts und des Isoperimeters, erklärt Taylor, bei den ersteren beiden habe er sich einer eigenen Analysis bedient, beim dritten der des hochverdienten Mathematikers Jakob Bernoulli. Seine Lösung des zweiten Problems

[44]) Aus einem Briefe Taylors an Jones vom 5. Mai 1719 (in St. J. Rigauds Ausgabe der „Correspondence of scientific men of the 17th century in the collection of the Earl of Macclesfield", Oxford 1841, Vol. I, S. 278 bis 280) geht hervor, daß Taylor seine „Apologia" von Jones hat begutachten lassen, und daß letzterer sie ohne Vorwissen Taylors auch Newton vorgelegt hat. Taylor schreibt: Obwohl er aus verständlichen Gründen nicht habe darum bitten können, sei es ihm nachträglich doch ganz lieb, daß er auf diese Weise die Zustimmung Newtons zur Veröffentlichung der Schrift erhalten habe. Er bittet dann aber, Jones möge ihm auch noch seine eigene Meinung über folgende Punkte sagen: 1. ob er (Taylor) tatsächlich genügenden Grund habe, Bernoulli so anzugreifen, wie seine eigenen Leidenschaften es ihn glauben ließen; 2. ob sein Ansehen leiden würde oder nicht, wenn er den Angriff unterließe; 3. ob er sich in irgendeiner Sache, von der er spreche, irre; 4. ob er zuviel oder genug gesagt habe; 5. ob seine Ausdrücke klar seien; 6. ob er etwas gesagt habe, was gegen die Ehrenpflichten und guten Sitten verstoße. Denn da er fest entschlossen sei, sich später in keiner Weise mehr an diesem Gezänke zu beteiligen, so liege ihm sehr daran, dies eine Mal nichts zu sagen, was dem Tadel ausgesetzt sei.

[45]) Phil. Trans. 1719, No. 360, S. 955; auch gesondert erschienen; wiederabgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 478/483.

habe er seinen Freunden seit Anfang 1712 mitgeteilt, wie er durch Briefe Keills beweisen könne. Auch habe sein Buch schon seit April 1714 der Royal Society vorgelegen, im gleichen Jahre, in dem Joh. Bernoulli zwei Lösungen veröffentlicht habe, deren letztere mit der Taylorschen im Prinzip so wunderbar übereinstimme, als wenn beide von demselben Menschen erfunden wären. Hinsichtlich des letzten Problems des Isoperimeters lägen vier Lösungen vor, die von Jakob Bernoulli 1701, von Johann Bernoulli 1706, von Taylor in seinem Buche 1715, endlich wieder von Johann Bernoulli 1718. Aber letzterer scheine auf diesem Gebiete von allen Göttern verlassen zu sein. Denn sein erster Versuch von 1706 sei von Anfang bis zu Ende ein großer Fehler (vier einzelne Irrtümer werden noch genauer bezeichnet), seine Berichtigung von 1718 aber verwende genau die Analysis von Jakob Bernoulli unter Vereinfachung der Einzelrechnung, und das Prinzip der Uniformität endlich, das er neu entdeckt haben wolle, sei in Taylors Buch auf Seite 113 auch schon benutzt, wo $m : \dot{R} = m : R$ gesetzt werde. Johann Bernoulli habe hier also nur Altes wiederholt, und um das zu verbergen, versuche er, nicht nur Taylors, sondern sogar seines Bruders Lösung herabzusetzen, indem er behaupte, die erstere sei zu schwer verständlich, die letztere zu weitschweifig.

Am Schlusse seiner „Apologia" fragt Taylor höhnisch, woher denn nun nach alle dem Joh. Bernoulli das Recht nehme, den ersten Platz in der höheren Mathematik für sich zu beanspruchen und jeden, der darin Fortschritte mache, alsbald zu beschuldigen, er sei in „Bernoullis tiefere Entdeckungen eingedrungen". Ob man es nun noch glauben könne, wenn behauptet werde, die Regeln in der „Analyse des infiniment petits" des Marquis de l'Hospital stammten in Wahrheit von Bernoulli? [46]) Und ob man diesem zutrauen könne, andere die Bildung der höheren Differentiale gelehrt zu haben [47])? Doch das gehe ihn, Taylor, ja schließlich nichts an. Er beschränke sich darauf, sich selbst gegen Beschimpfungen zu schützen, und auch das nur dies eine Mal; auf fernere Erwiderungen Bernoullis zu antworten halte er für unnötig.

Diese schweren Gegenangriffe ließen natürlich auch Joh. Bernoulli nicht ruhen. Schon daß Taylor auf seine Vorschläge im Briefe an Montmort nicht eingegangen war, hatte ihn schwer erbittert, und er hatte bei der Veröffentlichung seiner Lösung des Taylorschen Problems im Juni 1719 [48]) außer einer energischen Verteidigung Leibnizens auch einige hämische Worte gegen die Arroganz der Engländer einfließen lassen. Als er nun aber gar die Taylorsche „Apologia" in die Hände bekam, wurde sein Zorn grenzenlos. Er selbst hielt sich

[46]) Daß de l'Hospitals Buch z. T. aus Vorlesungen hervorgegangen ist, die Joh. Bernoulli ihm gehalten hat, steht nach der Wiederauffindung dieser Vorlesungen fest; s. Johannis (I.) Bernoulli Lectiones de calculo differentialium; hrsg. v. P. Schafheitlin, Verhandlungen der Naturforsch. Ges. in Basel, Bd. 34, 1922.

[47]) Joh. Bernoulli hatte behauptet, Newton habe einen Fehler bei den zweiten Fluxionen gemacht und erst auf Bernoullis Hinweis berichtigt; vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², 1901, S. 316 und Eneströms Verbesserung dazu, Bibl. math. 3. Folge, Bd. XI, 1910/1, S. 262/5, ferner hier S. 50 u. 75.

[48]) S. Anhang A, Anm. 141.

freilich in der Öffentlichkeit zurück. Doch zwei ihm sehr nahe stehende Männer antworteten umso heftiger, zuerst Joh. Bernoullis Sohn Nikolaus (II.) auf die obenerwähnte Stelle in der Taylor-Rezension der Bibliothèque Angloise und dann in noch gröberem Tone sein Baseler Schüler Johann Burchard auf Taylors eigene „Apologia".

Nikolaus (II.) Bernoulli veröffentlichte in den Acta eruditorum vom Juni 1720 einen Aufsatz mit dem Titel: „Responsio ad Cl. Taylori Querelas" [49]), da er Taylor selbst für den Verfasser der genannten Rezension hielt. Er weist noch einmal darauf hin, daß sein Vater nicht der Verfasser der anonymen „Epistola pro eminente mathematico" sei, also nicht für den Plagiatsvorwurf gegen Taylor verantwortlich gemacht werden könne. Dann aber sucht er selbst nun doch alle Gründe zu widerlegen, die Taylor zur Verteidigung gegen diesen Vorwurf angeführt hat. Die Entschuldigung, daß er bei Nennung seiner Vorgänger auch ihre Fehler und Unvollkommenheiten hätte miterwähnen müssen, sei unzureichend. Denn bei den meisten Problemen lägen gar keine Fehler vor. Die kleinen Versehen Joh. Bernoullis beim isoperimetrischen Problem seien kaum der Rede wert, außerdem längst berichtigt, und die mangelnde Allgemeinheit, die Taylor der Lösung Jakob Bernoullis vorwerfe, sei kein Grund, diese zu verschweigen, denn verallgemeinern lasse sich jede Lösung noch weiter. Am wenigsten endlich sei die Rechtfertigung Taylors beim Problem des Schwingungsmittelpunktes geraten. Denn die Lösung Joh. Bernoullis sei keineswegs erst in den Pariser Mémoires 1717 herausgekommen, sondern auch schon, was Taylor verschweige, in den ihm wohl bekannten Leipziger Acta eruditorum vom Juni 1714. Die „Methodus incrementorum" dagegen, die Taylors Problemlösung enthalte, sei erst 1715 erschienen. Taylor habe also die Lösung Joh. Bernoullis sehr gut dabei verwenden können; und einige scharfsinnige Mathematiker glaubten nach privaten Briefen auch wirklich, daß die Taylorsche Lösung aus der Bernoullischen durch bloße Änderung des Gewandes entstanden sei. Zum Schluß geht Nikolaus (II.) Bernoulli noch weiter und will nicht einmal Taylors Erklärung, daß das Manuskript des Buches bereits ein Jahr vor seiner Veröffentlichung bei der Royal Society niedergelegt worden sei, gelten lassen; denn Taylor habe ja als Sekretär der Royal Society zu deren Archiven Zutritt gehabt und bis zum Druck das Blatt über den Schwingungsmittelpunkt nachträglich noch einfügen können.

Etwa ein Jahr später antwortete Johann Burchard am gleichen Orte mit einer langen „Epistola ad Virum Clarissimum Brook Taylor" [50]), die in größter Ausführlichkeit zu beweisen sucht, daß alle bisherigen Plagiatsvorwürfe gegen Taylor berechtigt seien, und sogar noch einige neue hinzufügt. Taylors „Methodus incrementorum" enthalte überhaupt außer dem Titel kaum etwas Neues, sei aber außerordentlich dunkel und unverständlich geschrieben, um die Dieb-

[49]) Acta erud. 1720, S. 279—283, wiederabgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 474/8.

[50]) Acta erud. 1721, S. 195/228 = Opera Bd. II, S. 483—512. Der Name des Verfassers ist an dieser Stelle der Acta erud. geschrieben: Johannes Burchardus; vgl. aber Anm. 55.

stähle bei anderen zu verheimlichen; Joh. Bernoullis große Leistungen dagegen seien über Taylors herabsetzende Kritik weit erhaben. Um das zu zeigen, veröffentlicht Burchard zahlreiche Auszüge aus den Briefen von Taylors eigenem Freunde Montmort, der auch Joh. Bernoulli hoch über Taylor gestellt und diesen mehrfach wegen seiner Dunkelheit und des Verschweigens seiner Vorgänger getadelt habe. Darüber brauche ich hier nicht näher zu berichten[51]), sondern beschränke mich auf die Hauptpunkte, die Burchard selbst zur Begründung der einzelnen Plagiatsvorwürfe anführt. Hinsichtlich des isoperimetrischen Problems wird betont, daß Taylor ja jetzt selber zugegeben habe, die Analysis Jakob Bernoullis früher verwandt zu haben, ohne damals seinen Namen zu nennen. Hinsichtlich des Schwingungsmittelpunktes wird den vorjährigen Ausführungen Nikolaus (II.) Bernoullis noch neu hinzugefügt: Durch Taylors eigene Erwähnung der zwei Lösungen Joh. Bernoullis sei bewiesen, daß er auch die frühere, die schon 1714 herausgekommen sei, kenne; er tue aber fälschlich so, als wenn nur die spätere, 1717 herausgekommene, mit seiner eigenen vom Jahre 1715 übereinstimme, um deren Unabhängigkeit behaupten zu können; in Wahrheit aber weiche schon die erste nur in der Sprache und Ausdrucksweise davon ab. Daß er seine eigene Lösung schon 1712 an Freunde mitgeteilt habe, könne er durch Briefe Keills nicht beweisen; denn diesem Feinde Johann Bernoullis dürfe man in der Hinsicht kein Wort glauben.

Burchard fügt dann noch zwei neue Plagiatsvorwürfe hinzu. Taylors Bezeichnungsweise der höheren Fluenten und Fluxionen sei zwar von der Bernoullischen verschieden, aber ganz analog: $\acute{x} = \int x$, $\acute{\acute{x}} = \int\int x$, $\dot{x} = dx$, $\overset{n}{x} = d^n x$; und wenn Taylor hinzufüge, die Akzente seien sozusagen negative Punkte, also z. B. $\acute{\acute{x}} = \overset{-2}{x}$, so sei das auch nichts anderes, als was Joh. Bernoulli schon seit langem durch die Gleichung $\int^n x = d^{-n} x$ ausgedrückt habe; zum Beweis dessen wird ein Stück aus Bernoullis Brief an Leibniz vom 8./18. Juni 1695 abgedruckt[52]).

Im Anschluß hieran wird ferner darauf hingewiesen, daß Bernoulli in einem weiteren Briefe an Leibniz vom August 1695[53]) mit Hilfe eines Verfahrens, das auf dieser Auffassung der Integrale als negativer Differentiale beruhe, auch schon die beiden unendlichen Reihen abgeleitet habe, die Taylor nur in anderer Bezeichnungsweise ohne Nennung seiner Quelle im 11. Satze seines Buches (S. 38) wiedergegeben habe. Daß Bernoulli ihm hierbei um 20 Jahre vorausgegangen sei, könne ihm auch nicht unbekannt geblieben sein. Denn Bernoulli habe seine Entdeckung damals nicht nur brieflich an Leibniz, de l'Hospital, Varignon u. a., sondern auch öffentlich in den Acta eru-

[51]) Einiges darüber siehe im Anhang A, Nr. 20 mit Anm. 167; vgl. auch den Schluß von Anm. 153.

[52]) S. Leibnizens Math. Schr. hrsg. v. C. I. Gerhardt, Bd. III, Halle 1855/6, S. 179, Z. 5 v. u. bis S. 181, Z. 9.

[53]) ebenda S. 199, Z. 12 bis S. 200, Z. 16; das richtige Datum des Briefes ist nach S. 205 der 17. Juli (a. St.) 1695.

diturom 1694, S. 438 mitgeteilt. Damit sei Taylor als schuldig des Plagiats überführt.

Wenn er aber einwende, daß er hierbei doch auch wieder eine eigene Ableitung gegeben habe, so sei zwar zugegeben, daß diese sich von der Bernoullischen unterscheide, aber seine eigene sei es doch nicht, sondern sie stamme aus Moivres „Animadversiones contra Cheynaeum", 1704, S. 69. Taylor sei also zweifellos ein ganz ähnlicher Plagiarius wie dieser Cheyne.

Mit den beiden letzten Vorwürfen Burchards müssen wir uns im nächsten Abschnitt noch genauer beschäftigen. Ich gehe daher hier auf die mathematischen Einzelheiten noch nicht weiter ein, sondern beendige zuvor meinen Bericht über den äußeren Verlauf des Plagiatsstreites.

Taylor hatte sich, wie wir hörten, vorgenommen, auf keine Gegenangriffe Joh. Bernoullis mehr zu antworten. Das führte er auch durch. Nur bat er den Herausgeber der Acta eruditorum, Joh. Burc. Mencke, in einem Briefe vom 6. Juli 1722, eine tatsächliche Berichtigung in seiner Zeitschrift zu veröffentlichen, nämlich wegen der Beschuldigung, daß Taylor seine Berechnung des Schwingungsmittelpunktes aus der Bernoullischen entnommen habe. Taylors Brief ist auch wirklich unter dem Titel „Litterae B. Taylor ad J. B. M." in den Acta eruditorum erschienen [54]). Der ganz kurze Brief führt nur einen einzigen unwiderleglichen Gegengrund an, nämlich daß seine Entdeckung nicht erst in seinem Buche 1715, sondern schon in den Philosophical Transactions 1713 gedruckt und mit diesen im Mai 1714 öffentlich ausgegeben sei, also sicher mindestens einen Monat vor Bernoullis Aufsatz.

Auf dieses Schreiben Taylors entgegnete Burchard noch einmal im 8. Supplementbande der Acta eruditorum [55]). Daß Taylors Aufsatz in den Philosophical Transactions vor dem Bernoullis in den Acta eruditorum herausgekommen ist, kann er natürlich nicht abstreiten. Aber er sucht es so viel als möglich abzuschwächen, indem er auf einen noch früheren Aufsatz Bernoullis vom Februar 1713 „de oscillationibus pendulorum" hinweist, der wenigstens schon die Fundamente zur Berechnung des Oszillationszentrums lege und Taylor zur Ausführung der Berechnung angeregt haben könne. Außerdem stimme Taylors Aufsatz in den Philosophical Transactions (1713/4) nicht völlig mit der Stelle in seinem Buche (1715) überein. Taylor könne also bei der Umgestaltung doch noch durch Bernoullis Aufsatz (1714) beeinflußt sein. Immerhin muß Burchard in diesem Punkte einen Rückzug antreten. Umso stärker aber betont er, daß Taylor garnichts auf den Plagiatsvorwurf wegen der Bernoullischen Reihe erwidere, also schweigend zustimme.

Auch Joh. Bernoulli hat den letzteren Vorwurf im August 1724 noch einmal wiederholt, indem er gelegentlich einer Erwähnung die-

[54]) Acta erud. Lips., September 1722, S. 452, wieder abgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 516.

[55]) M. Joannis Burcardi Basil. Modesta et seria Responsio ad literas Broock Taylori, Acta erud. Suppl. tom. VIII, sect. V, Lips. 1724, S. 219/22, wiederabgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia 1742, Bd. II, S. 517/9.

ser Reihe und ihrer Erstveröffentlichung in den Acta eruditorum v. J. 1694 hinzufügte: „Dieselbe Reihe hat Taylor mehr als 20 Jahre später in sein Buch über die Methode der Inkremente, 1715, zu übernehmen geruht, nur unter einem anderen Gewand von Zeichen; s. sein Buch, S. 38“ [56]). Diese Stelle ist wohl das letzte, was in der Streitsache zu Lebzeiten der feindlichen Parteien veröffentlicht worden ist. Denn Taylor hat seinem Vorhaben entsprechend vornehm weitergeschwiegen und dadurch auch den Bernoullischen Kreis zum Verstummen gebracht.

3.

Was läßt sich nun heute über Recht und Unrecht in dem damaligen allzu persönlich geführten Streit rein sachlich feststellen? Wenn auch der Kampf zuletzt ohne vollständige Entscheidung abgebrochen worden ist, so hat er doch in einigen Punkten schon zur hinreichenden Klärung der Verhältnisse geführt. Die beiden Entdeckungen, auf die Taylor selbst das Hauptgewicht gelegt hat, die systematische Behandlung der Integrationskonstanten (im 4., 5. und 8. Satz) und die mathematische Theorie der Saitenschwingungen (im 22. und 23. Satz) haben ihm von niemandem bestritten werden können; in beiden kommt ihm sicher die Priorität zu. Dasselbe gilt auch für die Berechnung des Schwingungsmittelpunktes. Denn nicht nur ist sein Aufsatz in den Philosophical Transactions 1713 zweifellos eher an die Öffentlichkeit gekommen als der Bernoullische in den Acta eruditorum 1714, sondern es besteht auch kein Grund, seine Angabe zu bezweifeln, daß er seine Lösung schon Anfang 1712 an John Keill brieflich mitgeteilt habe. Wissen wir doch, daß sogar schon seine erste mathematische Arbeit im Jahre 1708 diesem Probleme gegolten hat (s. o. S. 3).

Dagegen hat er selber für die Lösung des Problems der Kettenlinie und der isoperimetrischen Kurven nie die Priorität beansprucht. Sie kommt aber Joh. Bernoulli ebenso wenig zu wie ihm, sondern vielmehr dem älteren Bruder Jakob. Dem letzteren verdanken die beiden anderen auch das Prinzip ihrer eigenen vereinfachten Lösung des letzteren Problems, was Taylor offen zugibt, während Joh. Bernoulli es nicht recht wahr haben will. Von einem Plagiat Taylors an Jakob Bernoulli kann jedenfalls nicht die Rede sein, und noch viel weniger von einem Plagiat an Joh. Bernoulli.

Zwei der damaligen Streitpunkte aber sind bis heute noch unentschieden und bedürfen der genaueren Untersuchung, nämlich Taylors Selbständigkeit 1. bei der Ableitung der in seinem elften Satz gegebenen unendlichen Reihe, die in der Mathematikgeschichte nach Joh. Bernoulli benannt zu werden pflegt, und 2. bei der Schöpfung seiner allgemeinen Methode und Bezeichnungsweise der endlichen Inkremente, die selbständig neben dem Infinitesimalkalkül steht und zu seiner neuen Begründung dient.

[56]) In seinem Aufsatze: Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes etc., Acta erud. Lips. 1724, S. 356 ff. wieder abgedruckt in seinen Opera omnia, 1742, Bd. II, S. 582, insbesondere 584, Nr. II.

G. Peano[57]) hat aus der Erstveröffentlichung der genannten Reihe durch Joh. Bernoulli im Jahre 1694 und seiner letzten Prioritätserklärung im Jahre 1724[56]) noch weitergehend geschlossen, daß Bernoulli sogar die unter dem Namen Taylors bekannte Reihe für sich beansprucht habe und dazu „nicht unberechtigt" sei, da man tatsächlich „mittels Vertauschung von Buchstaben" von der Bernoullischen zur Taylorschen Reihe übergehen könne. Hiergegen hat freilich Alfred Pringsheim[58]) mit Recht eingewandt, daß, wie die von Peano weggelassene Anführung der bestimmten Seitenzahl durch Bernoulli beweise, dieser garnicht die heute sogenannte Taylorsche Reihe (Satz 7, S. 21 der Methodus incrementorum), sondern nur die sog. Bernoullische Reihe (Satz 11, S. 38) für sich beansprucht habe, ferner daß die Worte „sub alio characterum abitu (vielmehr habitu)" nicht übersetzt werden dürften „mittelst Vertauschung von Buchstaben", sondern „mit Verwendung einer abweichenden Bezeichnungsweise", und daß endlich auch die zwar mögliche, aber von Bernoulli nicht geahnte Ableitung der Taylorschen aus seiner eigenen Reihe keineswegs durch eine selbstverständliche Buchstabenvertauschung, sondern nur durch eine erheblich mühevollere Transformation geleistet werden könne[59]). Aus diesem Grunde nimmt Pringsheim die Priorität der Taylorschen Reihe doch für Taylor in Anspruch[60]).

Aber wie steht es mit der Priorität hinsichtlich der Bernoullischen Reihe und mit Taylors Plagiat? Dazu äußert sich Pringsheim nicht ausdrücklich. Es scheint jedoch, daß er Taylors Selbständigkeit trotz Bernoullis Priorität auch bei der letzteren Reihe annimmt. Jedenfalls erklärt er, der Beweis Taylors für sie sei „einfacher und dabei relativ strenger" als der frühere Bernoullische. M. Cantor dagegen[61]) äußert sich zum Teil weniger günstig für Taylor, wenn er

---

[57]) A. Genocchi, Calcolo differenziale, ed. G. Peano, 1884; deutsch von G. Bohlmann und A. Schepp, Leipzig 1899; Bemerkung Peanos zu Nr. 67, S. XVII der italienischen, S. 319 der deutschen Ausgabe.

[58]) A. Pringsheim, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes, Bibl. math. 3. Folge, Bd. I, 1900, S. 433 ff., insbesondere S. 435/7. Hier sind folgende Druckfehler zu berichtigen: S. 435, Z. 16 und 27: habitu statt abitu, Z. 20: 38 statt 39.

[59]) Diese Transformation ist ausgeführt von Pringsheim, S. 437, Anm. 1. In Anm. 2 wird hinzugefügt, daß Bertrand in seinem großen Traité du calc. diff. p. 310 nur die umgekehrte, sehr einfache Transformation erwähnt, von der Bernoullischen Reihe aber behauptet habe, sie sei „von einer sehr abweichenden Form und im allgemeinen viel weniger brauchbar als die Taylorsche Reihe." G. Eneström (Bibl. math. 3. Folge, Bd. VI, 1905, S. 213) weist dem gegenüber darauf hin, daß Maclaurin in seinem Treatise of fluxions, London 1742, S. 612, bemerkt habe, die Taylorsche Reihe sei von der Bernoullischen nicht wesentlich verschieden (not materially different).

[60]) Pringsheim erwähnt (S. 436[4] und 437[3]), daß auch Leibniz auf andere Weise eine ähnliche Reihe abgeleitet habe, identifiziert diese aber mit der Bernoullischen Reihe, während es in Wirklichkeit die Taylorsche ist; darauf muß ich in Abschnitt 4 noch ausführlich zurückkommen .

[61]) Vorl. z. Gesch. d. Math. III[2], 1901, S. 382/3, vgl. 228/9; H. Wieleitner, Gesch. d. Math. II. Teil, 1. Hälfte, Leipzig 1911, S. 149, kombiniert Pringsheim und Cantor, wenn er schreibt: „Auch die Bernoullische Reihe leitete Taylor . . . auf einem einfacheren und verhältnismäßig strengeren Wege ab, ohne aber den Erfinder zu nennen. Den Zusammenhang beider Reihen erkannten aber weder Taylor noch Bernoulli, der für seine Reihe mit Recht die Priorität reklamierte, auf Taylors Reihe aber keinen Anspruch hat."

sagt: „Taylor bediente sich allerdings einer anderen und, man darf hinzusetzen, weniger anfechtbaren Herleitung als der Erfinder der Reihe selbst, aber dennoch ist ihm der Vorwurf nicht wohl zu ersparen, jenen nicht genannt zu haben, und als ihm dieser Vorwurf im Maihefte 1721 der Acta eruditorum wirklich gemacht wurde, mußte er die Antwort schuldig bleiben". Cantor glaubt also, ebenso wie einst Burchard, aus Taylors Schweigen schließen zu dürfen, daß dieser seine Abhängigkeit von Bernoullis Erstveröffentlichung selber zugeben müsse und entschuldigt seine Nichtnennung des ersten Entdeckers nur zum Teil dadurch, daß er wenigstens einen eigenen, besseren Beweis hinzugefügt habe.

Diese Ausführungen der neueren Mathematikhistoriker bedürfen, wie mir scheint, noch ebenso sehr der Nachprüfung wie die ehemaligen Burchards. Taylors Schweigen allein beweist garnichts, denn es kann auch den Grund gehabt haben, daß er sich in diesem Punkte, wo er kein so unwiderlegliches Gegenargument wie bei der Berechnung des Schwingungsmittelpunktes zur Verfügung gehabt hatte, nicht fruchtlos mit dem unbelehrbar voreingenommenen Kreise Johann Bernoullis herumschlagen wollte. Andererseits ist auch die Behauptung, Taylor habe einen neuen, besseren Beweis gegeben, noch nicht hinreichend bewiesen, da bisher niemand die beiden verschiedenen Bernoullischen Ableitungen mit der Taylorschen genau verglichen hat. Stellen wir also zunächst fest, wie Joh. Bernoulli seine Reihe gefunden und bewiesen hat.

Aus seinem Briefwechsel mit Leibniz in den Jahren 1694/95 [62]) und aus seiner Erstveröffentlichung der Reihe [63]) ergibt sich darüber folgendes: Bernoulli hatte in den Acta eruditorum vom April 1693 einen Leibnizschen Aufsatz gelesen, in dem die Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe unendlicher Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten gelehrt wird [64]). Dies Integrationsverfahren suchte Bernoulli nun in der Weise zu verbessern, daß nicht mehr in jedem einzelnen Falle eine besondere Rechnung nötig ist, um die unendliche Reihe zu finden, sondern daß ein allgemeiner Ansatz sämtliche einzelnen Reihen umfaßt. Diese „series universalis" oder „generalissima" leitet er in den Acta eruditorum vom November 1694 [63]) folgendermaßen ab: „ Wenn n eine Größe ist, die irgendwie aus Unbestimmten und Konstanten gebildet ist", d. h. in der Leibnizschen Ausdrucksweise eine „Funktion", und zwar speziell eine Funktion von z, so bildet er „durch fortgesetzte Addition und Subtraktion gleicher Größen" die Reihe:

---

[62]) Joh. Bernoulli an Leibniz, 2. Sept. 1694; Leibniz an Bernoulli 6./16. Dez. 1694; Bernoulli an Leibniz, 2./12. Februar 1695; Leibniz an Bernoulli, 28. Febr. und 6./16. Mai 1695; Bernoulli an Leibniz 8./18. Juni und 17. Juli (a. St.) 1695; in: Leibnizens Math. Schr., Bd. III, S. 150; 155/6; 160; 167 und 175; 179/81 und 199/200; die beiden letzten Stellen sind auch bei Burchard abgedruckt, s. Anm. 50, 52, 53.

[63]) Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam, Acta erud. Lips. Nov. 1694, S. 437—41; wiedergedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, Bd. I, S. 125/8.

[64]) Acta erud. Lips. 1693, S. 178/80; wiedergedruckt in Leibnizens Math. Schr. V, 1858, S. 285/8, vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², 1901, S. 213/4.

I.) $$n\,dz = +n\,dz + z\,dn - z\,dn - \frac{zzddn}{1\cdot 2\,dz} + \frac{zzddn}{1\cdot 2\,dz} + \frac{z^3dddn}{1\cdot 2\cdot 3\,dz^2} - \frac{z^3dddn}{1\cdot 2\cdot 3\,dz^2} \text{ usw.}$$

Man erkennt sofort, daß auf der rechten Seite, wenn man sie bis ins Unendliche fortsetzt, in Wirklichkeit nur n dz steht, da alle anderen Glieder sich gegenseitig aufheben. Nun lassen sich je zwei aufeinanderfolgende Glieder als Differentialquotienten eines Produktes auffassen; so ist $+ n\,dz + z\,dn = + d(nz)$;

$$-z\,dn - \frac{zzddn}{1\cdot 2\,dz} = -d\left(\frac{zzdn}{1\cdot 2\,dz}\right); \text{ usw.}$$

Integriert man auf beiden Seiten, so ergibt sich:

II.) $$\text{integr. } n\,dz = + nz - \frac{1}{1\cdot 2}zz\,\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\,\frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4\,\frac{dddn}{dz^3} \text{ usw.}$$

Diese „Bernoullische Reihe" stellt das Integral einer beliebigen Funktion n von z durch die unendliche Folge ihrer Differentialquotienten und der Potenzen der unabhängigen Veränderlichen dar.

Als Bernoulli seine Reihe Leibniz mitteilte, erwiderte dieser ihm, daß er eine gleichwertige Reihe schon vor langen Jahren auf ganz andere Weise abgeleitet habe; diese Reihe, die Leibniz aus der Differenzenberechnung durch Grenzübergang zur Differentialrechnung beweist und in die Bernoullische Reihe transformiert, ist aber nichts anderes als ein Fall der Taylorschen Reihe, wie wir im 4. Abschnitt noch genauer sehen werden.

Im Laufe der weiteren Korrespondenz erwähnt Leibniz gelegentlich, daß man die Integrale auch als Differentiale negativer Ordnung auffassen könne: $d^0n = \int^0 n = n$; $d^{-1}n = \int^1 n$; $d^{-2}n = \int^2 n$ usw.[65]), sowie daß eine merkwürdige Übereinstimmung bestehe zwischen den Exponenten der Potenzen eines Binoms und den Ordnungszahlen der Differentiale eines Produkts zweier Faktoren (oder, wie er auch kurz sagt, zwischen Logarithmen und „Quasilogarithmen"):

$(x+y)^2 = x^2y^0 + 2xy + x^0y^2$ und entsprechend:
$d^2xy = d^2x\,d^0y + 2\,dx\,dy + d^0x\,d^2y$; ebenso:
$(x+y)^3 = x^3y^0 + 3x^2y + 3xy^2 + x^0y^3$ und entsprechend:
$d^3xy = d^3x\,d^0y + 3\,d^2x\,dy + 3\,dx\,d^2y + d^0x\,d^3y$ usw.[66]).

[65]) Math. Schr. Bd. III, S. 167; vgl. in Bernoullis Antwort S. 171 und hier Anm. 68.

[66]) Ebenda S. 175, 181, 221/2; vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², S. 230; ich habe die Leibnizsche Schreibweise etwas modernisiert und zugleich die Analogie noch etwas deutlicher hervortreten lassen. Diese Leibnizschen Gedanken bilden den Ursprung des „symbolischen Kalküls der Charakteristiken", den Joh. Bernoulli, Lagrange, Cauchy u. a. weiter entwickelt haben; vgl. Tardy, Intorno ad una formola del Leibniz, Bulletin de Bibliogr. et de l'Hist. des Sciences, Juni 1868; Note dazu von Genocchi vor der Turiner Acad., 10. Januar 1869; Hoüel, Sur une formule de Leibniz, Bordeaux 1869.

Auch auf Integrale statt Differentiale (entsprechend den negativen Binomialpotenzen), auf Quotienten statt Produkte (entsprechend den subtraktiven Binomen) und auf größere Zahlen von Faktoren läßt diese Formel sich übertragen.

Diese Mitteilungen Leibnizens haben nun Joh. Bernoulli angeregt, ein allgemeines symbolisches Rechenverfahren zur Vereinfachung der Integration auszubilden, das u. a. die Bernoullische Reihe in ganz neuer Weise herzuleiten gestattet. Man kann nämlich danach d^3y, d^2y, d^1y, $d^0y = y$, $d^{-1}y = \int y$, $d^{-2}y = \int\int y$ usw. symbolisch als Potenzen von dy, die ganze Folge also als geometrische Reihe mit dem Faktor $d^{-1}y$ betrachten, wenn man dabei das y als bloßen Index zur Unterscheidung der symbolischen Potenzbasis d_y von einer anderen d_x behandelt. Es gelten demnach folgende Rechenregeln:
$d^my \cdot d^ny = d^{m+n}y$, $d^my : d^ny = d^{m-n}y$, $(d^my)^n = d^{m \cdot n}y$, $\sqrt[n]{d^my} = d^{m:n}y$. Insbesondere ist $d^2y : d^2y = d^0y = y$; ebenso auch $x : x = d^0x : d^0x = d^0x = x$; $\int y = d^{-1}y = dy : d^2y = d^2y : d^3y$ usw.

In der obigen symbolischen geometrischen Reihe ist jedes Glied die symbolische dritte Proportionale der beiden vorhergehenden, also seines ersten und zweiten Differentials, insbesondere ist: $d^1y : d^0y = d^0y : d^{-1}y$, also $d^{-1}y = \int y = y^2 : dy$. Das Integral eines Ausdrucks wird demnach erhalten, wenn man sein symbolisches Quadrat durch sein Differential symbolisch dividiert. Für $y = n \cdot dz = d^0n \cdot d^1z$ ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \int n\,dz &= (d^0n\,d^1z)^2 : (d^0n\,d^2z + d^1n\,d^1z) \\ &= d^0n\,d^2z : (d^0n\,d^2z + d^1n\,d^1z) \\ &= d^0n\,d^1z : (d^0n\,d^1z + d^1n\,d^0z) \end{aligned}$$

Führt man diese symbolische Division in der Weise aus, daß man mit der Division durch $d^0n\,d^1z$ beginnt, so erhält man bei immer weiterer Fortsetzung die unendliche Reihe:

$$\int n\,dz = d^0n\,d^0z - d^1n\,d^{-1}z + d^2n\,d^{-2}z - d^3n\,d^{-3}z \pm \text{usw.}$$

III. $\int n\,dz = n\,z - dn \int z + d^2n \int\int z - d^3n \int^3 z \pm$ usw.

Betrachtet man jetzt z als unabhängige Veränderliche, nach der die Differentiation und Integration ausgeführt werden soll, so ist die Reihe zu schreiben:

$$\text{IV. } \int n\,dz = nz - \frac{dn}{dz}\int z\,dz + \frac{d^2n}{dz^2}\int\int z\,dz^2 - \frac{d^3n}{dz^3}\int^3 z\,dz^3 \pm \text{usw.}$$

$$\text{V. } \int n\,dz = nz - \frac{dn}{dz}\cdot\frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{d^2n}{dz^2}\cdot\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{d^3n}{dz^3}\cdot\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \pm \text{usw.}$$

Das ist genau die Reihe, die Bernoulli in den Acta eruditorum 1694 veröffentlicht hat (oben S. 31, No. II).

Man kann aber auch n als unbhängige Veränderliche betrachten. Zu dem Zwecke muß man bei der symbolischen Division zuerst durch das zweite Glied des Divisors, $d^1n\,d^0z$, teilen. Dann ergibt sich die unendliche Reihe: $\int n\,dz = d^{-1}n\,d^1z - d^{-2}n\,d^2z + d^{-3}n\,d^3z \mp$ usw.

VI. $\int n\,dz = dz \int n - d^2z \int\int n + d^3z \int^3 n \mp$ usw.

oder bei Einfügung der unabhängigen Veränderlichen:

VII. $\int n \frac{dz}{dn} dn = \frac{dz}{dn} \int n\, dn - \frac{d^2z}{dn^2} \iint n\, dn^2 + \frac{d^3z}{dn^3} \int^3 n\, dn^3 \mp$ usw.

VIII. $\int n\, dz = \frac{dz}{dn} \frac{n^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^2z}{dn^2} \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^3z}{dn^3} \frac{n^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \mp$ usw.

Vergleichen wir jetzt diese beiden Bernoullischen Ableitungen mit der Taylorschen im 11. Satz seiner „Methodus incrementorum", so ergibt sich, daß Bernoulli und sein Schüler Burchard recht haben, wenn sie behaupten, daß die beiden Teile von Taylors 4. Theorem (oder 11. Satz) auf S. 38 der „Methodus incrementorum" durch die Bernoullischen Reihen III. und VI. vollständig vorweggenommen sind. Man braucht nur n durch s, z durch r zu ersetzen, t als unabhängige Veränderliche einzuführen und endlich in Newtons Weise die Fluxionen $\frac{ds}{dt}$ durch $\dot{s}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ durch $\ddot{s}$ usw., die Fluenten $\int r dt$ durch $\acute{r}$ (oder auch bei zusammengesetzten Integranden wie $r = pq^2$, durch $\boxed{pq^2}$) sowie $\iint r\, dt^2$ durch $\acute{\acute{r}}$ usw. zu bezeichnen, dann verwandelt sich Bernoullis Reihe III:

$$\int n \frac{dz}{dt} dt = nz - \frac{dn}{dt} \int z\, dt + \frac{d^2n}{dt^2} \iint z\, dt^2 - \frac{d^3n}{dt^3} \int^3 z\, dt^3 \pm \text{usw.}$$

in: $\boxed{s\dot{r}} = sr - \dot{s}\acute{r} + \ddot{s}\acute{\acute{r}} - \dddot{s}\acute{\acute{\acute{r}}} \pm$ usw.

Diese aber stimmt genau mit der ersten Reihendarstellung in Taylors 4. Theorem (bei bloßer Umstellung der Faktoren) überein:

$\boxed{\dot{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \acute{\acute{r}}\ddot{s} - \acute{\acute{\acute{r}}}\dddot{s} +$ etc.

Und man braucht das Gleiche nur bei Bernoullis Reihe VI.:

$$\int n \frac{dz}{dt} dt = \frac{dz}{dt} \int n\, dt - \frac{d^2z}{dt^2} \iint n\, dt^2 + \frac{d^3z}{dt^3} \int^3 n\, dt^3 \mp \text{usw.}$$

durchzuführen, so verwandelt sie sich in eine Reihe für $\boxed{s\dot{r}}$, die sich von der zweiten Taylorschen:

$\boxed{\dot{r}s} = \dot{r}\acute{s} - \ddot{r}\acute{\acute{s}} + \dddot{r}\acute{\acute{\acute{s}}} -$ etc.

nicht einmal in der Reihenfolge der Faktoren unterscheidet. Hier gibt also Taylor vollständig dasselbe wie Bernoulli.

Anders aber ist es beim Beweis der beiden Reihen. Taylor setzt die gesuchte Fluente $\boxed{\dot{r}s}$ entweder $= rs + p$ oder $= \dot{r}\acute{s} + p$ und bestimmt p durch Fluxionsbildung, d. h. Differenzieren. Es ergibt sich:

entweder $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$ oder $\dot{r}s = \ddot{r}\acute{s} + \dot{r}s + \dot{p}$, also

„ $\dot{p} = -r\dot{s}$ „ $\dot{p} = -\ddot{r}\acute{s}$

„ $p = -\boxed{r\dot{s}}$ „ $p = -\boxed{\ddot{r}\acute{s}}$

Durch Einsetzen dieser Fluenten für $-p$ erhält man aus den ursprünglichen Fluentengleichungen die folgenden:

$\boxed{\dot{r}s}$ entweder $= rs - \boxed{r\dot{s}}$ oder $= \dot{r}\acute{s} - \boxed{\ddot{r}\acute{s}}$

Die neuen Fluenten (für $-p$) setzt Taylor wieder entsprechend an:

entweder $\boxed{r\dot{s}} = \acute{r}\dot{s} + q$ oder $\boxed{\ddot{r}\acute{s}} = \ddot{r}\acute{\acute{s}} + q$

Daraus ergibt sich durch abermalige Fluxionsbildung:

entweder $\dot{r}\dot{s} = r\dot{s} + \dot{r}\ddot{s} + \dot{q}$ oder $\ddot{r}\dot{s} = \dddot{r}\ddot{s} + \ddot{r}\dot{s} + \dot{q}$, also

„ $\dot{q} = -\dot{r}\ddot{s}$ „ $\dot{q} = \dddot{r}\ddot{s}$

„ $q = -\boxed{\dot{r}\ddot{s}}$ „ $q = -\boxed{\dddot{r}\ddot{s}}$

Durch Einsetzen dieser Werte von q in die von $-p$ und dieser in die ursprünglichen Fluxionsgleichungen folgt

$\boxed{\dot{r}s}$ entweder $= rs - \dot{r}\dot{s} + \boxed{\dot{r}\ddot{s}}$ oder $= \dot{r}\dot{s} - \ddot{r}\ddot{s} + \boxed{\dddot{r}\ddot{s}}$

Durch Weiterführung des gleichen Verfahrens erhält man entweder die erste oder die zweite Bernoulli-Taylorsche Reihe.

Das Prinzip dieses Beweises ist offenbar die fortgesetzte Wiederholung der sog. partiellen (genauer: faktorenweisen) Integration:

$$\int u\,v\,dx = u\int v\,dx - \int\left[\frac{du}{dx}\int v\,dx\right]dx.$$

Setzt man u jedesmal gleich dem zweiten Faktor in der Fluente (s, $\dot{s}$, $\ddot{s}$ usw.) und v gleich dem ersten ($\dot{r}$, r, $\dot{r}$ usw.), so ergibt sich die erste Reihe; setzt man u gleich dem ersten und v gleich dem zweiten, so folgt die zweite Reihe. Taylor benutzt nur nicht die allgemeine Formel für das Integral eines Produktes, sondern führt die Integration in jedem einzelnen Falle besonders aus, indem er immer wieder zunächst nur einen Faktor integriert und dann das zweite zur vollkommenen Integration erforderliche Glied (p) mit Hilfe der Formel für den Differentialquotienten eines Produktes bestimmt.

Daß diese Ableitung eine völlig andere ist als die zweite Bernoullische (oben S. 32), liegt auf der Hand. Die letztere ist ja eigentlich überhaupt kein Beweis, sondern eine bloße symbolische Übertragung, die erst durch Rückgang auf die eigentliche Bedeutung der Symbole als zulässig erwiesen, vielleicht aber auch auf ihre notwendigen Grenzen eingeschränkt werden müßte. Dagegen besteht eine enge Verwandtschaft mit der ersten Bernoullischen Ableitung (oben S. 31). Denn auch diese beruht auf der immer wiederholten Hinzufügung von Ergänzungsgliedern entsprechend der Formel für den Differentialquotienten eines Produktes, nur daß Bernoulli alles sofort in eine einzige Gleichung (I.) zusammenfaßt. Jedenfalls aber entspricht Taylors: $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$ (woraus $\dot{p} = -r\dot{s}$ erschlossen wird) genau den drei ersten Gliedern der Bernoullischen Reihe I.: $n\,dz = n\,dz + z\,dn - z\,dn$, und hieraus wird die endgültige Reihe II. ebenfalls durch Integration nach Zusammenfassung der beiden ersten Glieder in d(nz) gebildet. Nimmt man noch hinzu, daß sich, wie Burchard hervorgehoben hat, bei Moivre eine Stelle findet, wo dieser in noch genauerer Übereinstimmung mit Taylor die Fluente von $\dot{z}y = zy - q$ setzt und daraus schließt: $\dot{z}y = \dot{z}y + z\dot{y} - \dot{q}$ oder $\dot{q} = z\dot{y}$, so kann man mit vollem Recht behaupten, daß Taylor bei der Bernoullischen Reihe II. auch hinsichtlich der Beweismethode überhaupt nichts Neues entdeckt hat. Da er die Bernoullischen Abhandlungen in den Acta eruditorum, wie wir von ihm selbst wissen, gekannt hat, so ist es aufs höchste wahrscheinlich, daß er dem Aufsatze vom Jahre 1694 diese Reihe und den Grundgedanken ihres Beweises entnommen hat.

Trotzdem ist es unberechtigt, ihm daraus einen Plagiatsvorwurf zu machen. Denn er hat ja niemals behauptet, daß alle Sätze seines Buches von ihm selber entdeckt seien, sondern in seinem Selbstbericht nur den 3., 4., 5., 8., 22., 23., 24. und 27. Satz für sich in Anspruch genommen, nicht aber den jetzt in Betracht kommenden 11., dem er auch im Vergleich zum 7. (der „Taylorschen Reihe") nur eine spezielle Bedeutung zuschreibt; und in anderen Fällen hat er sogar ausdrücklich auf seine Vorgänger hingewiesen, z. B. beim 17. auf die Brüder Bernoulli. Was er für den ganzen Inhalt seines Buches beansprucht, ist lediglich, daß alles einheitlich nach seiner eigenen Inkrementenmethode und in seiner neuen Bezeichnungsweise abgeleitet sei und daß auch die schon bekannten Sätze wegen dieser neuartigen Ableitung eine abermalige Publikation verdienten.

Diese Behauptung ist auch beim 11. Satz durchaus berechtigt. Dessen Ableitung bei Taylor hat gegenüber der bei Bernoulli sogar große Vorzüge. Während bei diesem die Reihe I. (oben S. 31) völlig unvorbereitet, wie aus der Kanone geschossen, auftaucht, sieht man bei Taylor, wie sie durch Integration je des ersten Faktors allmählich entsteht. Ferner sieht Bernoulli völlig darüber hinweg, daß bei Ausführung der Integration, die je zwei Glieder der Reihe I. zu einem einzigen der Reihe II. zusammenfaßt, jedesmal ein weiteres überschießt, dessen Mitberücksichtigung zur Richtigkeit erforderlich wäre. Taylor dagegen schreibt dieses „Restglied" bei jedem Einzelschritte ausdrücklich als Fluente hin: $p = -\boxed{r\dot{s}}$, $q = -\boxed{f\dot{s}}$ usw. Es ist also berechtigt, wenn Pringsheim[58]), Cantor[61]) und Wieleitner[61]) seine Ableitung für „weniger anfechtbar" und „verhältnismäßig strenger" als die Bernoullis erklären. Die volle Strenge fehlt aber auch bei ihm. Denn er setzt die Reihe ebenso wie Bernoulli unbedenklich bis ins Unendliche fort, ohne jede Konvergenzbetrachtung. Und man darf ihm auch nicht etwa die bewußte Einführung des „Restgliedes" zuschreiben, denn ein solches taucht wohl bei jedem einzelnen Schritte der Ableitung auf, die ganze Reihe aber läßt er ohne ein solches mit + etc. schließen. Immerhin würde sich aus seinem Gedankengange ohne weiteres folgern lassen, daß, wenn die Reihe mit dem n-ten Gliede abgebrochen wird, ein Restglied $R_n = (-1)^n \boxed{r^{-(n-1)}\, s^n}$ hinzuzufügen wäre. Und jedenfalls hat Taylor die von Bernoulli 1794 zuerst veröffentlichte Reihenentwicklung durch seine Umgestaltung des Beweises nicht unbeträchtlich verbessert. Außerdem hat er noch eine zweite, ähnliche Reihe, entsprechend der Bernoullischen Reihe VI. (s. o. S. 32) hinzugefügt und erstmalig bewiesen, die zwar von Bernoulli im Briefe an Leibniz vom 17. Juli (a. St.) 1695 auch schon erwähnt und symbolisch abgeleitet, aber noch nicht veröffentlicht worden war. Diesen Brief hat Taylor zweifellos nicht gekannt, sonst wäre es ihm vom Bernoullischen Kreise sicher vorgehalten worden. Durch Bernoullis Veröffentlichung in den Acta eruditorum v. J. 1694 aber kann er zu dieser Ergänzung nicht angeregt worden sein, denn die dortige Ableitungsweise ist im Gegensatz zu der von Bernoulli im Briefe an Leibniz gegebenen einseitig für die erste Reihe pas-

send und deutet auf keine zweite Möglichkeit hin. Für diese zweite Form der Bernoullischen Reihe kommt also Taylor zweifellos die Priorität der Veröffentlichung und die volle Selbständigkeit der Wiederentdeckung zu. —

Es bleibt uns jetzt noch ein Vorwurf Burchards zu untersuchen, nämlich daß Taylors allgemeine Methode und Bezeichnungsweise von Joh. Bernoulli schon um über 20 Jahre vorweggenommen sei (s. o. S. 27). Dieser Vorwurf ist leicht als völlig unberechtigt zu erkennen, wenigstens was Bernoulli angeht. Denn dieser hat garnicht wie Taylor eine Methode der endlichen Inkremente zur neuen Begründung der Infinitesimalrechnung angewandt; und auch die der Taylorschen Bezeichnungsweise der Fluenten (durch Akute oder übergesetzte negative Zahlen) zuvorkommende analoge Schreibweise: $\int\int x = d^{-2}x$ oder allgemein $\int^n x = d^{-n}x$ stammt jedenfalls nicht von Joh. Bernoulli, sondern von Leibniz. Burchard hat nämlich beim Abdruck des Bernoullischen Briefes, in dem er diese Schreibweise nachweist, hinzuzufügen vergessen, daß Bernoulli ebenso wie die allgemeine Bezeichnungsweise der Differential- und Integralrechnung[67]) insbesondere auch die Auffassung der Integrale als Differentiale negativer Ordnung lediglich von Leibniz übernommen hat[68]). Da der Briefwechsel zwischen Bernoulli und Leibniz Taylor nicht bekannt war, so kann ein Plagiat in dieser Hinsicht ohnehin nicht in Betracht kommen. Aber auch die Priorität hätte nicht für Bernoulli, sondern nur für seinen Lehrmeister Leibniz beansprucht werden dürfen.

4.

Damit kommen wir zum Schlußabschnitt unserer mathematikgeschichtlichen Untersuchung, dem Verhältnis der Taylorschen zu den Leibnizschen Entdeckungen auf dem Gebiete der endlichen und infinitesimalen Differenzen oder Differentiale. Wie wir im 1. Abschnitte dieses Kapitels (oben S. 9—12) von Taylor selbst hörten, ist dieser zur Ausbildung seiner Methode der endlichen Inkremente und Dekremente durch zwei Stellen in Newtons Werken angeregt worden, wo es heißt, die Fluxionen seien den werdenden oder verschwindenden Inkrementen proportional. Daraus schloß Taylor, daß

---

[67]) Leibniz hat das Integral- und Differentialzeichen bekanntlich nach den von C. I. Gerhardt wiedergefundenen Handschriften bereits am 29. Okt. 1675 eingeführt und im Druck seit 1684 (Diff.) und 1686 (Int.) verwandt. Joh. Bernoulli bediente sich seit seiner Erstveröffentlichung 1691 des Leibnizschen Differentialzeichens, seit 1695/96 auf Leibnizens Bitte auch des $\int$-Zeichens, während er früher integr. oder I geschrieben hatte; nur den Namen Integral hat Leibniz in der gleichen Zeit, sozusagen im Austausch, von Bernoulli übernommen, während er früher von infinitesimalen „Summen" entsprechend den „Differenzen", gesprochen hatte; vgl. Leibnizens Math. Schr. III, 1855/56, S. 168, 172, 177/8, 180, 262, 272/3.

[68]) Leibniz hat den Gedanken im P. S. des Briefes an Bernoulli vom 28. Februar 1695 geäußert, und Bernoulli hat ihn in seiner Antwort vom 20./30. April 1695 übernommen; s. Anm. 65. Der von Burchard abgedruckte Brief Bernoullis (s. Anm. 50 und 52) ist erst vom 8./18. Juni 1695.

es zum Verständnis und zur Begründung der Fluxionsrechnung wünschenswert sei, zunächst die Inkremente im allgemeinen zu untersuchen und dann durch Nullwerdenlassen der endlichen Inkremente zur Fluxionsrechnung überzugehen. Die Berechtigung dieses Überganges müsse dann durch eine „deductio ad absurdum" nach Art der antiken Exhaustionsmethode erwiesen werden. Daß Leibniz eine ähnliche „Methode der Differenzen" schon früher ausgebildet hat, ist Taylor nicht unbekannt. Er hält sie aber nach der Rezension in der Bibliothèque Angloise für „weniger allgemein", da Leibniz von „Differenzen", d. h. Abweichungen je zweier fester Größen spreche, während er selbst die „Inkremente", also das kontinuierliche Wachstum einer veränderlichen Größe betrachte.

Leibniz dagegen hebt, wie wir im 2. Abschnitt (o. S. 18—19) sahen, in seiner Rezension Taylors hervor, daß dieser jetzt genau ebenso verfahre, wie er selbst schon seit mehreren Jahrzehnten, nämlich gleichfalls mit der Berechnung endlicher Differenzen und Summen von Zahlenreihen beginne und daraus die infinitesimale Berechnung von Tangenten und Flächeninhalten ableite, während die Engländer früher nur von Fluxionen und Fluenten gesprochen hätten. Taylor bediene sich zwar einer anderen Bezeichnungsweise; aber sachlich bestehe überhaupt kein Unterschied, auch nicht bei seiner angeblichen Vermeidung unendlich kleiner Differenzen; denn ebenso wie Leibniz verwende auch Taylor diesen Ausdruck schließlich selbst wieder „des leichteren Verständnisses halber", während freilich beim strengen Beweise nur von entstehenden oder verschwindenden Größen gesprochen werden dürfe. Wenn schließlich Taylor Leibnizens Differenzenrechnung für „weniger allgemein" als die Inkrementenrechnung erklärt, so behauptet Leibniz umgekehrt, sie sei vielmehr allgemeiner, denn sie fasse das, was Taylor als Inkremente und Dekremente getrennt behandle, gemeinsam als Differenzen, nur nach der einen oder anderen Richtung, zusammen.

Diese Ausführungen Leibnizens sind zweifellos richtig und können von der heutigen Wissenschaftsgeschichte nur bestätigt, ja noch weiter ergänzt werden. Leibniz konnte sich Taylor gegenüber nur auf seinen im Commercium epistolicum Collins, 1712, gedruckten Brief an Oldenburg vom Jahre 1673 und seinen Aufsatz über die Analogie von $d^m(xy)$ und $(x + y)^m$ in den Miscellanea Berolinensia vom Jahre 1710 berufen (s. Anmerkung 30 und 31), wo einige Anfänge seiner Differenzenrechnung schon damals allgemein zugänglich waren. Heute aber ist noch sehr viel mehr über deren weitere Ausgestaltung und Übertragung ins infinitesimale Gebiet bekannt [69]), und daraus geht mit noch viel größerer Deutlichkeit hervor, daß Taylor in dieser Hinsicht tatsächlich Leibniz nur wiederholt hat. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1676 [70]) hat

[69]) D. Mahnke, Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis. Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. Jg. 1925, Phys. math. Kl. No. 1, Berlin 1926, bes. S. 52—58. J. E. Hofmann u. H. Wieleitner, Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Mit Zusätzen von D. Mahnke. Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss. Phys. math. Kl. 1931, XXVI, Berlin 1931, bes. S. 577/8, 581/6.

[70]) De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolae, zuerst teil-

Leibniz z. B. mehrere Sätze der Differenzenrechnung abgeleitet und zur Grundlegung der Infinitesimalgeometrie benutzt und bei der Gelegenheit auch ausdrücklich betont, daß es wichtig sei, eine allgemeine Differenzenrechnung „unter Abstraktion von der Zu- oder Abnahme", auszubilden. In der gleichen Abhandlung [71]) wird ferner, ganz wie es Taylor in seiner Selbstdarstellung fordert, durch eine „deductio in absurdum" mit antiker Exaktheit bewiesen, daß unter bestimmten Voraussetzungen beim Übergang ins infinitesimale Gebiet kein Fehler von angebbarer Größe entsteht; außerdem beginnt Leibniz hier bereits eine direkte Begründung der Infinitesimalrechnung durch Grenzübergänge [72]), die er später noch genauer durch die Voraussetzung der Kontinuität gerechtfertigt hat. Der Vorwurf, unendlich kleine Größen als reale Dinge angesehen zu haben, trifft Leibniz ebenso wenig wie Newton. Er bezeichnet sie vielmehr schon in der genannten Abhandlung vom Jahre 1676 als bloße Fiktionen [73]) oder gedankliche Hilfsannahmen zur Vereinfachung des Rechen- oder Beweisverfahrens und hat später immer deutlicher auseinandergesetzt, daß der wahre Sinn der fingierten verschwindenden Größen nur durch einen Grenzprozeß erklärt werden könne. Schon hieraus geht auch unwiderleglich hervor, daß Taylors weitere Behauptung, bei Leibniz fehle noch der Gedanke des kontinuierlichen Wachstums einer veränderlichen Größe, vollständig unhaltbar ist. Leibniz ist vielmehr der eigentliche Schöpfer des allgemeinen Funktionsbegriffes, insbesondere auch des Fachausdruckes „Funktion" [74]), und das Kontinuitätsprinzip ist eine der Grundlagen seiner gesamten exakten Wissenschaft.

Aber Leibnizens Vorwegnahme Taylors geht sogar noch tiefer bis ins Einzelne. Auf Grund weiterer Handschriften, u. a. des bereits erwähnten Briefes von Leibniz an Joh. Bernoulli vom 6./16. Dezember 1694 und der näheren Ausführung seines Inhaltes in einem späteren Aufsatzentwurfe [75]) ist in der jüngsten Vergangenheit festgestellt worden, daß Leibniz mit seiner Methode des Überganges von der Differenzen- zur Differentialrechnung genau wie Taylor auch bereits die Darstellung von Funktionen durch unendliche Reihen abgeleitet hat, die noch heute Taylors Namen trägt [69]). Hinsichtlich der allgemeinen Methode der Inkremente bleibt also von Taylors Originalität fast nichts mehr übrig. Nur einen Punkt kann man in dieser Hinsicht hervorheben, daß nämlich Taylor zur deutlichen Unterscheidung der endlichen „Inkremente" und „Integralgrößen von den infinitesimalen „Fluxionen" und „Fluenten" als erster besondere Zeichen für sie eingeführt hat [76]):

weise gedruckt in: L. Scholtz, Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz, Dissertation, Marburg 1934, S. 41/72; besonders S. 41/5, vgl. 16/9.

[71]) Ebenda S. 41 u. 50 ff.; 16 u. 20 ff.

[72]) Ebenda S. 60 ff.

[73]) Ebenda S. 35, 53, 63/4, 69/70.

[74]) Mahnke, Neue Einbl. (s. Anm. 69), S. 48—52.

[75]) Leibnizens Math. Schr. hrsg. v. C. J. Gerhardt, Bd. III, Halle 1855, S. 155/6; vgl. auch Bd. V, S. 397/8; die letztere Darstellung in der „Historia et origo calculi differntialis" stammt allerdings erst aus Leibnizens letzten Lebensjahren.

Während Leibniz seine „Differenzen“ und Summen“ ohne Unterscheidung ihres endlichen oder infinitesimalen Charakters gleichmäßig mit $d^n y$ oder $\int^n y = d^{-n} y$ bezeichnet, verwendet Taylor für die endlichen Inkremente im Unterschied von den infinitesimalen Fluxionen unter- statt übergesetzte Punkte oder positive Zahlen und für die endlichen Integralgrößen im Unterschied von den infinitesimalen Fluenten unter- statt übergesetzte negative Zahlen (nicht auch, wie Cantor fälschlich behauptet, accentus graves statt acuti, s. o. S. 12 mit Anm. 19). Die heutige Bezeichnungsweise mit Δ und Σ, die Euler in seinen „Institutiones calculi differentialis“, Petersburg 1755, S. 27, eingeführt hat, knüpft allerdings doch wieder an Leibniz, nicht an Taylor an.

Aber wenn schon Leibnizens Priorität hinsichtlich der allgemeinen Differenzenmethode hiernach zweifellos feststeht, so läßt sich daraus doch noch keinerlei Plagiatsvorwurf gegen Taylor begründen. Es ist ja ebenso gut möglich, daß dieser seine Methode, ohne von den eben erwähnten, damals noch unveröffentlichten Entdeckungen Leibnizens irgend etwas zu wissen, auf einem ganz anderen Wege wieder entdeckt und selbständig zur Lösung neuer Einzelprobleme weiter entwickelt hat. Um hierüber zu einer endgültigen Entscheidung zu gelangen, wird es nötig sein, Leibnizens und Taylors Verfahrungsweise in einem besonderen Beispiele nach ihrem sachlichen Gehalt und ihrer geschichtlichen Entstehung noch genauer bis ins Einzelne miteinander zu vergleichen, so daß die Übereinstimmungen und die Abweichungen ganz klar hervortreten. Für diesen Zweck scheint mir am geeignetsten der Satz 7 der „Methodus incrementorum“ zu sein, der ja als „Taylorscher Satz“ ganz besonders bekannt ist und bis vor kurzem allgemein als Taylors originellste Leistung gegolten hat, während jetzt, wie erwähnt[69]), auch in diesem Falle Leibniz als erster Entdecker festgestellt worden ist. Herr Professor Mahnke stellt mir hierfür die folgende Darstellung zur Verfügung, die gegenüber seiner früheren in mehreren Hinsichten ergänzt und verbessert ist.

In dem schon öfter herangezogenen Briefe an Joh. Bernoulli vom 6./16. Dezember 1694[75]) geht Leibniz von einer abnehmenden Zahlenreihe aus, deren letztes Glied $\omega = 0$ ist[77]), und bildet ihre sämtlichen Differenzenreihen:

	a b c d usw.
Reihe der 1. Differenzen:	e f g h usw.
„ „ 2. „ :	l m n o usw.
„ „ 3. „ :	p q r s usw.
„ „ 4. „ :	t u v w usw[78])
„ „ 5. „ :	x y z usw.[78])
usw.	usw.

[76]) Dieser Punkt wird in H. Wieleitners Gesch. d. Math., 2. Teil, 1. Hälfte, Leipzig 1911, S. 230, hervorgehoben, um die Bezeichnung Taylors als ersten „Schöpfers einer wirklichen Theorie der Differenzenrechnung“ zu rechtfertigen.

[77]) In der „Historia“ (s. Anm. 75) geht er von dem allgemeineren Fall aus, wo das letzte Glied $\omega \neq 0$ ist.

[78]) Leibniz nennt die 4. Differenzen versehentlich zuerst t u v x, nachher

Alle Buchstaben bedeuten positive Zahlen; Leibniz setzt also voraus, daß sämtliche Reihen monoton abnehmen. Dann ist:

$$a = e + f + g + h + i + \text{usw.}$$

worin
$$e = 1e$$
$$f = 1e - 1l$$
$$g = 1e - 2l + 1p$$
$$h = 1e - 3l + 3p - 1t$$
$$i = 1e - 4l + 6p - 4t + 1x$$
usw. ist.

Also läßt sich a durch je das erste Glied der verschiedenen Differenzenreihen, multipliziert mit je einer Summe von bestimmten figurierten oder kombinatorischen Zahlen, folgendermaßen ausdrücken:

I. $a = (1 + 1 + 1 + \cdots)\, e - (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots)\, l + (1 + 3 + 6 + 10 + \cdots)\, p - (1 + 4 + 10 + 20 + \cdots)\, t + \text{usw.}$

Dieser Satz kann von endlichen Differenzen auch auf Differentiale übertragen werden. Dann ist, wie Leibniz an Bernoulli schreibt, statt a zu setzen y und statt der Differenzen e, l, p, t, x . . . die Differentiale dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y, ... An die Stelle der konstanten Einheit 1, der Differenz zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, tritt das Differential dx, der Unterschied zweier unendlich benachbarten Werte der unabhängigen Veränderlichen x. Infolgedessen verwandelt sich $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ in $dx + dx + dx + dx$ usw. ins Unendliche $= x$, ebenso $1 + 2 + 3 + 4 \ldots$ in $\int x$, $1 + 2 + 3 + 10 \ldots$ in $\int\int x$, $1 + 4 + 10 + 20 + \cdots$ in $\int^3 x$ usw.

Also ergibt sich

$$y = dy \,.\, x - ddy \int x + d^2y \int\int x - d^3x \int^3 x + \text{usw.},$$

oder, wenn man das Gesetz der Homogeneität [79]) beachtet:

$$y = \frac{dy}{dx}\, x - \frac{ddy}{\overline{dx}^2} \int x\, dx + \frac{d^3y}{\overline{dx}^3} \int\int x\, \overline{dx}^2 - \frac{d^4y}{\overline{dx}^4} \int^3 x\, \overline{dx}^3 \quad \text{usw.}$$

---

aber t v w x. Für die Reihe der 5. Differenzen verwendet er die griechischen Buchstaben $\beta, \gamma, \delta, \vartheta$.

[79]) Die „lex homogeneorum" fordert, daß Größen, die man miteinander vergleicht oder zusammensetzt, „vom gleichen Grade" sind. In der Geometrie z. B. sind wohl Rechtecke und Quadrate, aber nicht Quadrate und Würfel miteinander vergleichbar, allgemein nur Gebilde von gleicher Dimensionenzahl. Diese Regel überträgt Leibniz als „lex homogeneorum transcendentalis" auch auf die Infinitesimalrechnung und erkennt hier als „homogen" dx mit dy, $\overline{dx}^2$ mit $\overline{dy}^2$ und $dx \cdot dy$, aber auch mit ddy usw. (Math. Schr. Bd. V, 377—382, Bd. VII, S. 65/6). Um die obige Gleichung homogen zu machen, müssen also, da links kein Differential steht, auch rechts die Differentiale beseitigt oder ausgeglichen werden, indem man statt dy das Verhältnis $dy : dx$, statt ddy das Verhältnis $ddy : \overline{dx}^2$ usw. setzt. Leibniz vergißt an dieser Stelle, das Entsprechende auch bei den Integralen zu machen. Nach seinen Ausführungen an anderen Stellen (z. B. Math. Schr. Bd. III, S. 167/8) ist aber: $y = d^0y$, $\int y = d^{-1}y$, $\int\int y = d^{-2}y$ usw. Folglich muß, wenn statt d^ny geschrieben wird $d^ny : \overline{dx}^n$, statt $\int^n y$ geschrieben werden $d^{-n}y : \overline{dx}^{-n} = \int^n y \cdot \overline{dx}^n$, wie Leibniz es sonst auch meistens tut. Abgesehen von dieser Verbesserung bei der Schreibung der Integrale sind die Reihen hier im Texte buchstäblich ebenso gedruckt, wie Leibniz selbst sie im Briefe an Bernoulli geschrieben hat.

oder, wenn man die Integration ausführt:

$$\text{II. } y = \frac{1}{1}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1\cdot 2}xx\frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\frac{d^3y}{dx^3} - \\ - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4\frac{d^4y}{dx^4} \text{ usw.}$$

Aus dieser Leibnizschen Reihe folgt sofort die Bernoullische, wenn man y, dy, ddy, . . . je um einen Grad „weiterrücken läßt" (promovendo) in $\int y\,dx$, y, $\frac{dy}{dx}$ . . .:

$$\text{III. } \int y\,dx = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{1\cdot 2}xx\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\frac{ddy}{dx^2} \text{ usw.}$$

Diese Ableitungen Leibnizens lassen sich folgendermaßen in moderner Schreibweise darstellen und bestätigen. Es sei eine Zahlenreihe $[y_k]_{k=0}^{n}$ gegeben, in der $y_k - y_{k+1} = \Delta y_k > 0$ und $y_n = 0$ ist; auch die höheren Differenzen $\Delta^l y_k = \Delta^{l-1} y_k - \Delta^{l-1} y_{k+1}$ sollen sämtlich positive Zahlen sein [80]). Dann läßt sich folgendes Schema aufstellen:

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \text{usw.} \\ \Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 & \text{usw.} \\ \Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & \Delta^2 y_3 & \text{usw.} \\ \Delta^3 y_0 & \Delta^3 y_1 & \Delta^3 y_2 & \Delta^3 y_3 & \text{usw.} \\ \Delta^4 y_0 & \Delta^4 y_1 & \Delta^4 y_2 & \Delta^4 y_3 & \text{usw.} \end{array}$$

Aus diesem Schema folgt:

$y_0 - y_n = \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1}$ oder, da $y_n = 0$ ist:

$y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta y_k$, worin gesetzt werden darf:

$\Delta y_0 = 1 \cdot \Delta y_0$

$\Delta y_1 = 1 \cdot \Delta y_0 - 1 \cdot \Delta^2 y_0$; entsprechend ist: $\Delta^2 y_1 = 1 \cdot \Delta^2 y_0 - 1 \cdot \Delta^3 y_0$;

$\Delta y_2 = 1 \cdot \Delta y_1 - 1 \cdot \Delta^2 y_1$; durch Einsetzen der beiden Ausdrücke der vorigen Zeile in die letzte Gleichung folgt:

$\Delta y_2 = 1 \cdot \Delta y_0 - 2 \cdot \Delta^2 y_0 + 1 \cdot \Delta^3 y_0$; entsprechend ist : $\Delta^2 y_2 = 1 \cdot \Delta^2 y_0 - 2 \cdot \Delta^3 y_0 + 1 \cdot \Delta^4 y_0$;

$\Delta y_3 = 1 \cdot \Delta y_2 - 1 \cdot \Delta^2 y_2$; durch Einsetzen der vorigen Zeilen folgt:

$\Delta y_3 = 1 \cdot \Delta y_0 - 3 \cdot \Delta^2 y_0 + 3 \cdot \Delta^3 y_0 - 1 \cdot \Delta^4 y_0$; entsprechend ist:

$\Delta^2 y_3 = 1 \cdot \Delta^2 y_0 - 3 \cdot \Delta^3 y_0 + 3 \cdot \Delta^4 y_0 - 1 \cdot \Delta^5 y_0$

---

[80]) Das ist nur möglich, wenn $\Delta^l y_k$ nicht nur $\geqq$ sondern $> \Delta^l y_{k+1}$ ist, und zwar schon für $l = 0$. Die Bedingung der monotonen Abnahme muß also schärfer als üblich verstanden werden. — Die obige Ableitung bleibt auch gültig, wenn negative Glieder in der gegebenen Reihe oder in ihren Differenzenreihen vorkommen. Leibniz beschränkt sich aber auf positive, teils aus allgemeiner Gewohnheit, teils aber auch, wie sich später zeigen wird, in der besonderen Absicht, der Konvergenz der abzuleitenden Reihe gewiß zu sein.

usw., also schließlich:

$$\Delta y_k = 1 \cdot \Delta y_0 - k \cdot \Delta^2 y_0 + \binom{k}{2} \Delta^3 y_0 - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} \cdot \Delta^{k+1} y_0$$

$$= \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \cdot \binom{k}{l} \Delta^{l+1} y_0.$$

Durch Addition der sämtlichen ersten Differenzen $[\Delta y_k]_{k=0}^{n-1}$ folgt:

$y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \Delta^{l+1} y_0$ oder, wenn man die Glieder mit dem gleichen Faktor $\Delta^k y_0$ zusammenfaßt:

$$y_0 = \Delta y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{0} - \Delta^2 y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{1} + \Delta^3 y_0 \sum_{k=0}^{n-} \binom{k}{2}$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \Delta^n y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n-1}.$$

Da $\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{p-1}$ ist, so läßt sich in dieser Reihe tatsächlich, wie Leibniz behauptet, der Koeffizient von $(-1)^p \Delta^{p+1} y_0$ immer aus dem Koeffizienten des vorhergehenden Gliedes durch eine nochmalige Summation gewinnen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{p} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{k}{p-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} \binom{k}{p-2} \text{ usw.}$$

Führt man diese Summationen sämtlich aus, so ergibt sich:

Ia. $$y_0 = \Delta y_0 \binom{n}{1} - \Delta^2 y_0 \binom{n}{2} + \Delta^3 y_0 \binom{n}{3} + \cdots (-1)^{n-1} \Delta^n y_0 \binom{n}{n}.$$

Dieser Satz läßt sich von endlichen Differenzen auch auf Differentiale übertragen, wenn man anstelle der Reihe, deren Glieder y_0, y_1, y_2 ... in n Sprüngen bis $y_n = 0$ monoton abnehmen (und für deren sämtliche Differenzenreihen Analoges gilt), eine Funktion $y = f(x)$ betrachtet, die, während x von einem festen Werte x_0 ganz gleichförmig bis 0 abnimmt, stetig und monoton (wenn auch im allgemeinen nicht so gleichförmig wie x) von $y_0 = f(x_0)$ bis 0 abnimmt (und für deren Differentialquotienten Analoges gilt). Um von der diskreten Reihe zur kontinuierlichen Funktion überzugehen, muß man die Gliederanzahl $n \to \infty$ vergrößern, gleichzeitig aber die Abschnitte $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n$ des Gesamtintervalls $(x_0 - 0)$ in demselben Verhältnis $\to 0$ verkleinern, wie man n vergrößert, so daß $n \cdot \Delta x$ stets $= x_0$ bleibt, auch in der Grenze $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$. Dann verkleinern sich sämtliche $\Delta^k y_1$ ebenfalls $\to 0$, doch so, daß $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ immer einen endlichen Wert behält und schließlich

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = \frac{df(x_1)}{dx} = f'(x_1) \text{ wird; ebenso}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} = \frac{df'(x_1)}{dx} = f''(x_1), \ldots$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n y_1}{\Delta x^n} = f^{(n)}(x_1).$$

Will man in der Reihe Ia. diesen Grenzübergang ausführen, so muß man zunächst in jedem Gliede den ersten Faktor $\Delta^k y_0$ durch Δx^k dividieren und den zweiten $\binom{n}{k}$ ebendamit multiplizieren. Dann wird überall:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} = \frac{d^k y_0}{dx^k} = f^{(k)}(x_0);$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \binom{n}{k} \Delta x^k = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \frac{n \cdot \Delta x}{1} \cdot \frac{(n-1) \cdot \Delta x}{2} \cdot \frac{(n-2) \cdot \Delta x}{3} \cdots \frac{(n-k+1) \cdot \Delta x}{k}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0}{1} \cdot \frac{x_0 - \Delta x}{2} \cdot \frac{x_0 - 2\Delta x}{3} \cdots \frac{x_0 - (k-1) \cdot \Delta x}{k} = \frac{x_0^k}{k!}.$$ [81]

Also ergibt sich die Reihe:

$$\text{IIa. } y_0 = f(x_0) = f'(x_0) \frac{x_0}{1} - f''(x_0) \frac{x_0^2}{2!} + f'''(x_0) \frac{x_0^3}{3!} \text{ usw.}$$

oder, wenn man $z = g(x) = f'(x)$ und $g(0)$ wie $f(0) = 0$ setzt:

$$\text{IIIa. } \int_0^{x_0} z \cdot dx = \int_0^{x_0} g(x) \cdot dx = g(x_0) \cdot \frac{x_0}{1} - g'(x_0) \cdot \frac{x_0^2}{2!} + g''(x_0) \frac{x_0^3}{3!} \text{ usw.}$$

In diesen Gleichungen IIa. und IIIa. darf man den Index bei x_0 auch fortlassen. Denn sie können genau ebenso für jeden andern Wert x_k der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ abgeleitet werden, für den die Leibnizsche Voraussetzung erfüllt ist, daß $f(x)$ und alle Differentialquotienten davon im Intervall x_k bis 0 monoton abnehmen. Von der Konvergenz wird gleich noch genauer zu sprechen sein. —

Stellen wir jetzt dieser Leibnizschen Ableitung die Taylorsche im Satz 7 der „Methodus incrementorum" (S. 21—23) gegenüber, um sodann die beiden miteinander zu vergleichen. Taylor formuliert seinen Satz folgendermaßen:

„Seien z und x zwei veränderliche Größen, von denen z gleichförmig durch gegebene Inkremente ẓ vergrößert wird, und sei $n\dot{z} = v$, $v - \dot{z} = \dot{v}$, $\dot{v} - \dot{z} = \ddot{v}$ usw.
Dann sage ich, daß in derselben Zeit, in der z wachsend zu $z + v$ wird, x ebenfalls wachsend zu:

$$\text{IV. } x + \dot{x} \frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x} \frac{v\dot{v}}{1 \cdot 2\,\dot{z}^2} + \dddot{x} \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1 \cdot 2 \cdot 3\,\dot{z}^3} + \text{usw. wird."}$$

Er nimmt also z als unabhängige, x als abhängige Veränderliche oder, in Leibnizens Ausdrucksweise, x als Funktion von z an (umgekehrt wie es nach Leibnizens Vorgang heute üblich ist). Dann betrachtet er $(n+1)$

[81]) Die Vernachlässigung der Vielfachen von Δx bei den letzten Reihengliedern, wo $k \to n \to \infty$ wird, bedürfte aber noch einer besonderen Untersuchung.

verschiedene Werte von z, die sich je um das Inkrement ż unterscheiden, d. h. in heutiger Darstellungsweise die arithmetische Reihe $z_0, z_1, z_2 \ldots z_n$ mit der konstanten Differenz Δz; er schreibt sie folgendermaßen:

$$z,\ z + \dot{z},\ z + 2\dot{z}, \ldots \qquad z + (n-2)\dot{z},\ z + (n-1)\dot{z},\ z + n\dot{z}$$

Die letzten Werte lassen sich, wenn $n\dot{z} = v$ gesetzt wird, mit Taylors Gravis-Symbol auch so schreiben:

$$\ldots z + \grave{v},\qquad z + \grave{v},\qquad z + v$$

Taylors Endformel, die den zum letzten Werte von z (oder zu $z + n\dot{z}$) gehörigen letzten Wert von x darstellt, bedeutet demnach in moderner Schreibweise (wobei nur Taylors Bezeichnung der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen z und x beibehalten ist):

$$\text{IV a. } x_n = x_0 + \Delta x \cdot \frac{z_n - z_0}{1 \cdot \Delta z} + \Delta^2 x \cdot \frac{(z_n - z_0)\,(z_n - z_0 - \Delta z)}{1 \cdot 2 \cdot \Delta z^2}$$

$$+ \Delta^3 x \cdot \frac{(z_n - z_0)\,(z_n - z_0 - \Delta z)\,(z_n - z_0 - 2\Delta z)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \Delta z^3} + \text{usw.}$$

Den Beweis dieses Satzes führt Taylor auf Grund des folgenden Schemas:

x	$\dot{x}$	$\ddot{x}$	$\dddot{x}$	$\ddddot{x}$	usw.
$x + \dot{x}$	$\dot{x} + \ddot{x}$	$\ddot{x} + \dddot{x}$	$\dddot{x} + \ddddot{x}$	usw.	
$x + 2\dot{x} + \ddot{x}$	$\dot{x} + 2\ddot{x} + \dddot{x}$	$\ddot{x} + 2\dddot{x} + \ddddot{x}$	usw.		
$x + 3\dot{x} + 3\ddot{x} + \dddot{x}$	$\dot{x} + 3\ddot{x} + 3\dddot{x} + \ddddot{x}$	usw.			
$x + 4\dot{x} + 6\ddot{x} + 4\dddot{x} + \ddddot{x}$	usw.				
usw.					

In diesem Schema bedeutet die erste Spalte die arithmetische Reihe höherer Ordnung, die von den $(n + 1)$ verschiedenen Werten von x: $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ gebildet wird; die zweite Spalte bedeutet ihre erste Differenzenreihe:

$\Delta x_0 = x_1 - x_0$, $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2$, usw., die dritte Spalte ihre zweite Differenzenreihe:

$\Delta^2 x_0 = \Delta x_1 - \Delta x_0$, $\Delta^2 x_1 = \Delta x_2 - \Delta x_1$, $\Delta^2 x_2 = \Delta x_3 - \Delta x_2$, usw. bis zu der Differenzenreihe, deren sämtliche Glieder gleich sind. Vom obersten Glied der letzten Spalte ausgehend, baut Taylor das obige Schema nach links unten fortschreitend auf, wobei jedes Glied gleich der Summe der beiden unmittelbar senkrecht und schräg rechts darüberstehenden Glieder ist. Er stellt fest, daß bei fortgesetzter Addition die Newtonschen Binomialkoeffizienten immer höheren Grades auftreten. Folglich ergibt sich der zu $(z + v)$, d. h. zu z_n, gehörige Wert von $x =$

$$\text{V. } x + \frac{n}{1}\dot{x} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\ddot{x} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\dddot{x} + \text{usw.}$$

d. h. in moderner Schreibweise:

$$\text{Va. } x_n = x_0 + \binom{n}{1}\Delta x_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 x_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 x_0 + \text{usw.}$$

Nun ist aber $n\dot{z} = v$, $(n-1)\dot{z} = \dot{v}$, $(n-2)\dot{z} = \ddot{v}$ usw.

also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots = \frac{v}{\dot{z}} \cdot \frac{\dot{v}}{\dot{z}} \cdot \frac{\ddot{v}}{\dot{z}} \ldots$,

Setzt man das in V. ein, so folgt die zu beweisende Formel IV.

Als Corollar I. läßt Taylor einen analogen Satz für abnehmende veränderliche Größen folgen. Hierbei hat er allerdings anfänglich einige Versehen begangen, diese aber später in den „Corrigenda" der Auflage von 1717 richtig gestellt. In der Erstauflage lautete das Corollar: „Wenn die $\dot{z}$, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ usw. dieselben bleiben und das Zeichen des v geändert wird, so wird in derselben Zeit, in der z abnehmend zu z —v wird, x abnehmend zu

VI. $x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v\dot{v}}{1\cdot 2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3\dot{z}^3}$ usw.

oder nach unserer Bezeichnungsweise

VII. $x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{vv'}{1\cdot 2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{vv'v''}{1\cdot 2\cdot 3\dot{z}^3}$ usw.,

nachdem die $\dot{v}$, $\ddot{v}$ usw. in $-v'$, $-v''$[82]) usw. umgekehrt sind."

In den „Corrigenda" dagegen heißt der erste Nebensatz: „wenn die Zeichen der Inkremente geändert werden", der erste Hauptsatz: „so wird ... x ebenfalls abnehmend ...", und die zweite Hälfte des Corollars von „oder" an wird fortgelassen. Sie paßt in der Tat nicht zur ersten, denn wenn man in VI. $\dot{v} = -v'$, $\ddot{v} = -v''$ usw. einsetzt, so folgt nicht VII., sondern eine Reihe, in der auch das 3., 5. usw. Glied ein negatives Vorzeichen haben. Die Berichtigung des ersten Nebensatzes ist ebenfalls erforderlich, denn da $v = n\dot{z}$ ist und n als Anzahl der Inkremente positiv sein muß, so kann nicht $\dot{z}$ unverändert bleiben und zugleich v ein anderes Vorzeichen erhalten.

Der Beweis des I. Corollars in der Fassung von 1717 ist nach Analogie des vorhergehenden Beweises folgendermaßen zu denken. Das obige Schema muß so geändert werden, daß jedes Glied die Differenz (statt die Summe) der beiden senkrecht und schräg rechts darüber stehenden Glieder wird. Dann entstehen bei fortgesetzter Subtraktion abermals die Newtonschen Binomialkoeffizienten, nur jeder zweite mit negativem Vorzeichen. Folglich ergibt sich der zu z —v, d. h. z_n, gehörige letzte Wert von x =

VIII. $x - \frac{n}{1}\dot{x} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\ddot{x} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\dddot{x}$ usw.

d. h. in moderner Schreibweise:

VIIIa. $x_n = x_0 - \binom{n}{1}\Delta x_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 x_0 - \binom{n}{3}\Delta^3 x_0$ usw.

Nun ist aber $n \cdot (-\dot{z}) = -v$, $(n-1)\cdot(-\dot{z}) = -\dot{v}$, $(n-2)\cdot(-\dot{z})$

---

[82]) Nach der Indroductio müßten die Werte, die auf v folgen, vielmehr mit v', v'' bezeichnet werden.

$= -\dddot{v}$ usw., also $n(n-1)(n-2)\ldots$ wieder $= +\frac{v}{z}\cdot\frac{\ddot{v}}{z}\cdot\frac{\dddot{v}}{z}\cdot\ldots$

Setzt man dies in VIII. ein, so folgt die zu beweisende Formel VI. oder in moderner Schreibweise:

$$\text{VIa.}\quad x_n = x_0 - \Delta x_0 \frac{z_n - z_0}{1\cdot\Delta z} + \Delta^2 x_0 \frac{(z_n - z_0)(z_n - z_0 - \Delta z)}{1\cdot 2\cdot\Delta z^2} - \Delta^3 x_0 \frac{(z_n - z_0)(z_n - z_0 - \Delta z)(z_n - z_0 - 2\Delta z)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\Delta z^3} \pm \text{usw.}$$

Im II. Corollar läßt Taylor die endlichen Inkremente verschwinden (evanescere) und setzt für sie die proportionalen Fluxionen ein. Dann darf man $\dddot{v}$, $\ddot{v}$, $\dot{v}$, v, v', v'' usw. sämtlich $= v$ setzen. Die Formeln IV. und VI. verwandeln sich also in die folgenden:
„In derselben Zeit, in der z gleichmäßig fließend zu $z + v$ wird, wird x zu

$$\text{IX.}\quad x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\dot{z}^3} \text{ usw.}“$$

d. h. in heutiger Schreibweise

$$\text{IXa.}\quad x_n = x_0 + \frac{dx_0}{dz}\cdot\frac{z_n - z_0}{1} + \frac{d^2x_0}{dz^2}\frac{(z_n - z_0)^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3x_0}{dz^3}\frac{(z_n - z_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ usw.}$$

und: „in derselben Zeit, in der z abnehmend zu $z - v$ wird, wird x abnehmend zu

$$\text{X.}\quad x - \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot 2\dot{z}^2} - \dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\dot{z}^3} \text{ usw.}“$$

d. h. in heutiger Schreibweise

$$\text{Xa.}\quad x_n = x_0 - \frac{dx_0}{dz}\frac{z_n - z_0}{1} + \frac{d^2x_0}{dz^2}\frac{(z_n - z_0)^2}{1\cdot 2} - \frac{d^3x_0}{dz^3}\frac{(z_n - z_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ usw.}$$

Im achten Satz endlich zeigt Taylor, wie diese unendlichen Reihen zur Integration von Differenzen- und Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen verwandt werden können (s. darüber seinen Selbstbericht im 1. Abschnitt S. 15). —

Beim Vergleich dieser Taylorschen mit den obigen Leibnizschen Reihen und Beweisen ergibt sich zwar nicht eine so vollständige Übereinstimmung wie zwischen Taylors 11. Satz und der Bernoullischen Reihenentwicklung, aber doch eine sehr enge Verwandtschaft von Taylors I. Corollar und der 2. Hälfte seines II. Corollars (Formel VIII. und X.) mit Leibnizens Formel I. und II. (s. S. 40/1) sowie eine auffallende Gleichartigkeit des Beweisverfahrens.

Genau wie Leibniz geht Taylor von dem Schema einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung mit ihren sämtlichen Differenzenreihen aus. Er ordnet sie nur etwas anders an: Bei ihm stehen die Differenzen Δx_0, $\Delta^2 x_0$ usw. nicht in der ersten Schrägreihe, sondern in der ersten Horizontalreihe und die aus ihnen berechneten

Reihenglieder nicht in den horizontalen Reihen, sondern in den senkrechten Spalten. Aber auch Taylor erkennt ebenso wie Leibniz bei der gliedweisen Berechnung auf Grund dieses Schemas das Auftreten der kombinatorischen Zahlen, die er nur nach Newton Binomialkoeffizienten benennt. So ergibt sich die Formel VIII. (oder I.) der endlichen Inkrementen- oder Differenzenrechnung. Aus ihr folgern beide zum Schluß die Formel X. (oder II.) der Fluxions- oder Differentialrechnung durch Grenzübergang von diskreten Zahlenreihen zu kontinuierlich veränderlichen Funktionen.

Es besteht allerdings ein Unterschied zwischen den Taylorschen und Leibnizschen Reihen, insofern es sich bei den ersteren um die Darstellung eines s p ä t e r e n (kleineren) Gliedes oder Wertes einer monoton abnehmenden Zahlenreihe oder Funktion aus den Inkrementen oder Fluxionen einer f r ü h e r e n Stelle handelt, während Leibniz (wenigstens im Brief an Bernoulli, um von seiner eigenen zur Bernoullischen Reihe gelangen zu können) die Differenzen- oder Differentialquotienten der g l e i c h e n (Anfangs-) Stelle benutzt und das letzte Reihenglied oder den letzten Funktionswert gleich 0 annimmt. Wenn man aber die a l l g e m e i n e r e Darstellung in der anderen oben erwähnten Handschrift Leibnizens (Anm. 75 und 77) zugrundelegt, wo zwar der Schlußwert x_n der unabhängigen Veränderlichen x immer noch $= 0$, aber $y_n = \omega \neq 0$ gesetzt wird, so läßt sich durch eine einfache Transformation die völlige Gleichwertigkeit der Leibnizschen und Taylorschen Fassung zeigen. Es ist in Leibnizens eigener Schreibweise:

XI. $y - \omega = dy \cdot x - ddy \int x + d^3y \int\int x - d^4y \int^3 x +$ usw.[83]),

d. h. nach Ausführung der Integration in heutiger Schreibweise:

$$\text{XIa. } f(x_0) - f(0) = f'(x_0) \cdot x_0 - f''(x_0) \frac{x_0^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_0) \frac{x_0^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} -$$

$$- f^{(4)}(x_0) \frac{x_0^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \text{usw.}$$

$$\text{oder XII. } f(0) = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + f''(x_0) \frac{x_0^2}{1 \cdot 2}$$

$$- f'''(x_0) \frac{x_0^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \text{usw.}$$

Diese Gleichung aber unterscheidet sich von der Taylorschen Formel X. (oder in heutiger Schreibweise Xa.) nur noch durch die Wahl von $x_n = 0$, d. h. im geometrischen Bilde durch die Verlegung des Intervallendes in den Koordinatenanfangspunkt. Verschiebt man aber das Koordinatensystem längs der x-Achse, so daß x_n einen positiven Wert erhält und x_0, das ja von vornherein positiv angenommen war, sich um den gleichen Wert vergrößert, während y_n und y_0 unverändert bleiben, so ergibt sich für das Intervall von x_0 bis x_n:

[83]) Math. Schr. Bd. V, S. 398. Darin muß wieder wie oben auf S. 40 mit Anm. 79 nach der „lex homogeneorum“ dx, d^2x usw. als Quotient oder Faktor eingefügt werden.

XIII. $f(x_n) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_n) + f''(x_0)\frac{(x_0 - x_n)^2}{1 \cdot 2} -$

$$- f'''(x_0)\frac{(x_0 - x_n)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \text{usw.}$$

Damit ist die sachliche Gleichwertigkeit der Leibnizschen und Taylorschen Fassung erwiesen. Es entsprechen sich nämlich vollständig:

unser	x_0	x_n	$x_0 - x_n$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\ldots f(x_n)$
Leibnizens	x	o	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\cdots \omega$
Taylors	z	z—v	v	x	$\frac{\dot{x}}{\dot{z}}$	$\cdots$ —

Bei Taylor stehen nun aber im Haupttheorem des 7. Satzes und in der ersten Hälfte von Corollar II. vor den eben behandelten noch die einfacheren Formeln IV. und IX. (s. o. S. 43 und 46) für positive Inkremente und wachsende Funktionen. Diese von uns heute bevorzugte Reihenform[84]) fehlt bei Leibniz an beiden bisher herangezogenen Stellen. Aber sie fehlt auch bei ihm nicht völlig. In seinem Briefe an Bernoulli erwähnt Leibniz, er habe seine eigene Reihe, aus der die Bernoullische sich ableiten lasse, schon im Anfang seiner Pariser Zeit (1672 bis 76) entdeckt; in der Tat finden sich in den aus diesen Jahren erhaltenen Handschriften verschiedene unendliche Reihen, die nach dem an Bernoulli mitgeteilten Prinzip gewonnen sind, also, wie wir sagen würden, Taylorsche Reihen für bestimmte Funktionen; in diesen Handschriften aber werden, genau wie in Taylors Formel IX., auch Werte von wachsenden Funktionen aus den Funktionswerten und Differentialquotienten an einer früheren Stelle rein additiv berechnet[85]). Wenn wir auch dies mit berücksichtigen, so zeigt sich, daß Taylor im Grunde doch nichts anderes wiederentdeckt hat, als was Leibniz bereits zwei oder z. T. schon vier Jahrzehnte vorher gefunden hatte. Ja, in zwei Hinsichten ist Leibniz sogar schon etwas über Taylor hinausgegangen, nämlich 1. in der Erkenntnis des Zusammenhanges der Taylorschen mit der Bernoullischen Reihe, die bei Taylor im 11. Satze ohne jeden Zusammenhang mit dem 7. Satz ganz neu bewiesen wird, und 2. wahrscheinlich auch in der Frage nach der Konvergenz der Reihe. Zwar eine exakte Untersuchung des „Restgliedes" findet sich bei ihm ebensowenig wie bei Taylor, aber Leibniz hält es doch nicht einfach für selbstverständlich, daß die Reihen, die zunächst nur für endliche Differenzen und endliche Gliederzahlen abgeleitet sind, für Differen-

---

[84]) Nach heutiger Auffassung enthält sie die Reihe mit wechselnden Vorzeichen als besonderen Fall mit in sich, nämlich falls v eine negative Größe ist. Taylor schreibt beide Formen getrennt, weil er, wie Leibniz, Buchstaben ohne Vorzeichen immer als positive Größen auffaßt.

[85]) Einige Beispiele s. Mahnke 1926, (zitiert in Anm. 69), S. 52—56. Eine allgemeine Formulierung der Taylorschen Reihe ist bisher in den Leibnizschen Handschriften aus dieser Zeit noch nicht aufgefunden.

tiale ins Unendliche fortgesetzt werden dürfen, sondern er fordert als Voraussetzung dafür z. B. bei seiner Ableitung der Reihe XI. ausdrücklich, daß ihre Glieder nach 0 konvergieren [86]).

Seine Worte an dieser Stelle des schnell hingeworfenen Konzeptes sind allerdings nicht ganz sicher zu deuten; er scheint hier nämlich einen Augenblick die unendliche Reihe der aufeinanderfolgenden Funktionswerte versehentlich mit der jetzt in Frage stehenden unendlichen Reihe der Differentialquotienten zusammengeworfen zu haben. Doch mag er nun diese Verwechslung wirklich begangen haben oder nicht, daran kann jedenfalls kein Zweifel sein, daß er auch für die zweite Reihe, um sie ins Unendliche fortsetzen zu dürfen, die monotone Abnahme ihrer Glieder zum Grenzwert 0 vorausgesetzt hat. Diese Bedingung aber genügt, da hier eine alternierende Reihe vorliegt, in der Tat völlig zur Konvergenz der Reihensumme nach einem endlichen Grenzwerte, wie Leibniz schon im Jahre 1676 streng bewiesen hat [87]). Er hat damit als erster auch die Frage nach der Konvergenz von Taylorschen Reihen, wenigstens in einer großen Klasse von Fällen, positiv entschieden. Vielleicht ist die Rücksicht auf die Konvergenzbedingung sogar der unausgesprochene Grund gewesen, weshalb Leibniz die Reihe mit wechselnden Vorzeichen den anderen vorgezogen hat.

Trotz der hiernach unbezweifelbaren Vorrechte Leibnizens bei der Entdeckung der „Taylorschen Reihe" hat aber doch auch ihr zweiter Entdecker ebenso unbestreitbare Verdienste um sie: Erstens hat er sie, wie ich im folgenden zeigen werde, sicher völlig selbständig wiedergefunden, und zweitens hat er sie als erster veröffentlicht und in weiteren Kreisen bekanntgemacht, so daß die spätere Weiterbildung ausschließlich an ihn hat anknüpfen können.

Von Leibnizens Vorentdeckung hat nämlich nur Joh. Bernoulli durch den erwähnten Brief vom Jahre 1694 Kunde erhalten [88]). Und wenn auch vom Inhalt ihres Briefwechsels durch Bernoullis Verwandte und Freunde schon vor Taylors Wiederentdeckung einzelnes in die Öffentlichkeit gedrungen sein mag, so ist das doch gerade von diesem Punkte nicht anzunehmen. Denn dem Bernoullischen Kreise war es sicher mehr um den Ruhm der eigenen als der Leibnizschen Entdeckungen zu tun. So hat ja z. B. Burchard, wie wir sahen, nur die Vorentdeckung der Bernoullischen Reihe durch Veröffentlichung

[86]) Posito continuari in infinitum seu fieri $\omega = 0$ (Math. Schr. Bd. V, S. 398, Z. 3). Vorher sagt er im gleichen Sinne: Serie decrescente in infinitum (S. 397, Z. 6) und versteht darunter nicht nur, daß das letzte Glied selbst unendlich klein wird, sondern daß die ganze Reihe monoton $\rightarrow 0$ abnimmt.

[87]) De Quadratura Arithmetica Circuli Ellipseos et Hyperbolae, Prop. XLIX, gedruckt bei L. Scholtz, Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz, Diss. Marburg 1934, S. 71/2. Vgl. Leibnizens Brief an Jak. Hermann vom 26. Juni 1705 und an Joh. Bernoulli vom 10. Januar 1714 (Math. Schr. Bd. IV, S. 272/3 u. Bd. III, S. 936), aus denen schon seit langem bekannt ist, daß Leibniz als erster die Konvergenz der alternierenden monotonen Nullfolgen und damit die erste strenge Konvergenzbedingung überhaupt entdeckt hat. Die Entdeckung wurde aber bisher in eine viel zu späte Zeit verlegt. Auch wurde von einigen Seiten mit Unrecht die Stringenz des Leibnizschen Beweises angezweifelt.

[88]) Die andere Leibniz-Handschrift, in der wir die Taylorsche Reihe nachgewiesen haben (s. Anm. 75), ist erst von C. I. Gerhardt aufgefunden und 1846 zuerst (in einem Sonderdrucke) veröffentlicht worden.

von Briefen Bernoullis an Leibniz nachgewiesen, aber von den gleichzeitigen Leibnizschen Briefen, in denen dieser außerdem die Taylorschen Reihen VI. und X. vorweggenommen hatte, nicht das Geringste angedeutet. Ja sogar Leibniz selbst hat in seiner Rezension von Taylors „Methodus incrementorum" diese Reihen nicht besonders für sich reklamiert, sondern nur allgemein auf seine Priorität in der Methode der Differenzenrechnung hingewiesen. Es gibt also keinerlei positive Gründe für die Annahme, daß Taylor von Leibnizens Vorentdeckung seiner Reihen irgend etwas erfahren hätte.

Es gibt dagegen sehr gute Gründe für die entgegengesetzte Annahme, daß Taylor in diesem Falle, anders als bei der Bernoullischen Reihe, vollkommen unabhängig von seinem deutschen Vorgänger zur Wiederentdeckung gelangt ist. Wir können nämlich genau die englischen Quellen angeben, aus denen Taylor hier in Wirklichkeit geschöpft hat. Nicht nur steht die allgemeine Anregung durch Newton selbstverständlich fest, sondern es gibt, wie G. Eneström nachgewiesen hat[89]), auch zwei besondere Stellen in seinen „Principia"[90]) und seinem „Tractatus de quadratura curvarum"[91]), wo Newton bereits bestimmte Gedanken über die allgemeine Entwicklung von Funktionen in unendlichen Reihen geäußert hat. In heutiger Schreibweise lassen sich seine Ausführungen so wiedergeben:
$f(x_0 + dx) = f(x_0) + A_1 \cdot dx + A_2 \cdot d^2x + A_3 \cdot d^3x +$ usw.
An der ersten Stelle fügt Newton noch hinzu, daß A_1 von der Tangentenrichtung der Kurve, A_2 von der Krümmung, A_3 von der Variation der Krümmung usw., also allgemein A_n von $f^{(n)}(x_0)$ abhängt. Aber nur von A_1 zeigt er, daß es genau $= f'(x_0)$ ist, während er bei den folgenden Gliedern nicht ganz so weit gekommen ist, ja sich anfangs sogar versehen hat[92]). An der anderen Stelle wählt er als Funktionsbeispiel die Potenz und schreibt:

$$\overline{z + o}^{n} = z^n + no\,z^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oo\,z^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3}\text{usw.}$$

In dieser unendlichen Reihe, fügt er hinzu, ist das erste Glied die fließende Größe, das zweite ihr erstes Inkrement oder ihre erste Differenz, der, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die erste Fluxion proportional ist, das dritte ihr zweites Inkrement oder ihre zweite Differenz, der, wenn sie im Entstehen begriffen ist, die zweite Fluxion proportional ist usw.[92]). Ob die Koeffizienten der Potenzen von o oder dx im Falle anderer Funktionen denselben Wert wie bei der Potenz haben, sagt Newton allerdings nicht; auch sagt er nichts davon,

---

[89]) G. Eneström, Zur Vorgeschichte der Entdeckung des Taylorschen Lehrsatzes, Bibl. Math., 3. Folge, Bd. XII, 1911/2, S. 333/6.

[90]) Philosophiae naturalis principia mathematica, 2. Buch, 10. Satz, London 1687, S. 263, verbessert in der 2. Aufl. Cambridge 1713, S. 234. Diese 2. Auflage ist allerdings zu spät erschienen, als daß Taylor durch sie angeregt sein könnte.

[91]) Zuerst erschienen London 1704 im Anhang von Newtons Optik, dann London 1712 zusammen mit seiner Analysis per aequationes infinitas, ferner in Newtoni Opuscula, I, Lausanne und Genf 1744, diese Stelle S. 241/2.

[92]) Johann und Nik. (I.) Bernoulli haben daraus fälschlich schließen wollen, Newton habe die höheren Differentialquotienten nicht richtig berechnen können; vgl. Anhang A, Anm. 135.

daß man statt o oder dx auch eine endliche Differenz Δx wählen darf. Immerhin haben diese Stellen, die Taylor genau gekannt hat[93]), ihm sicher eine erste Anregung gegeben, die Darstellung von Funktionen durch unendliche Reihen, in denen nacheinander die Differentialquotienten immer höherer Ordnung auftreten, genauer durchzuführen.

Aber wir kennen sogar eine Quelle, aus der er noch mehr schöpfen konnte und nach seiner eigenen Angabe auch geschöpft hat. In seinem Brief an John Machin vom 26. Juli 1712, wo er zuerst von seiner neugefundenen unendlichen Reihenentwicklung Kenntnis gegeben hat[94]), bedient er sich bei der Lösung eines Keplerschen Problems der „Halleyschen Methode der Wurzelausziehung, die in den Transactions und am Ende von Newtons Algebra veröffentlicht ist", und fügt am Schlusse hinzu: „Während ich hierüber nachdachte, verfiel ich auf eine allgemeine Methode, Halleys Wurzelausziehung auf alle Probleme anzuwenden, bei denen der Flächeninhalt gegeben und die Abszisse gesucht ist, welche ich wegen des Nutzens, den sie bei der Berechnung haben kann (des allein zuverlässigen Gebrauches aller Korrektionen) nicht verschweigen kann." Taylor meint Halleys Aufsatz: „A new, exact, and easy Method of finding the Roots of any Equations generally, and that without any previous Reduction," der tatsächlich sowohl in den Philosophical Transactions (1694, No. 210, S. 136) als auch, in lateinischer Sprache, als Additamentum zu Newtons Arithmetica universalis, 1707 und öfter, erschienen ist[95]).

In diesem Aufsatz handelt es sich um Gleichungslösungen durch rechnerische Annäherung. Halley weist das gemeinsame Prinzip auf, das den Regeln von Th. F. de Lagny zur Annäherung von 3. bis 5. Wurzeln zugrunde liegt[96]) und erweitert es zu einer allgemeinen Methode der genäherten Berechnung von Wurzeln beliebiger algebraischer Gleichungen. Es sei a eine erste ungefähre Wurzel und + oder — e ihre Abweichung von der genauen Gleichungslösung. Dann setzt Halley in der rechten Seite der gegebenen Gleichung $A = cz + dz^2 + fz^3 + gz^4 + hz^5 +$ usw. statt z den Zahlenwert a ein und erhält statt des richtigen Gesamtwertes A etwa B; A—B sei = + oder — b[97]). Zweitens setzt er auf der rechten Gleichungsseite statt z den Ausdruck (a ± e) ein und ordnet das Ergebnis, unter Ausrechnung der Potenzen von (a ± e) nach der Newtonschen Binomialformel, übersichtlich in folgender Tabelle:

---

[93]) Vgl. seinen Selbstbericht, oben im 1. Abschnitt S. 11.

[94]) H. Bateman, The correspondence of Brook Taylor, Bibl. Math. 3. Folge, Bd. VII, 1906/7, S. 367 ff., bes. S. 370/1. Die Handschrift dieses Briefes befindet sich jetzt im Besitz des St. Johns College in Cambridge.

[95]) Cantor (Vorl., Bd. III², 1901, S. 119/20 und S. 394/5) behauptet fälschlich, diese und zwei andere Abhandlungen Halleys seien erst der dritten Auflage der Arithm. univ., 1732, beigegeben worden.

[96]) S. Cantor, Vorl., Bd. III², 1901, S. 120.

[97]) Die Buchstaben A und B sind von mir der Kürze halber hinzugefügt; bei Halley wird nur ± b benutzt.

$$cz = ca \pm ce$$
$$dz^2 = da^2 \pm 2dae + de^2$$
$$fz^3 = fa^3 \pm 3fa^2e + 3fae^2 \pm fe^3$$
$$gz^4 = ga^4 \pm 4ga^3e + 6ga^2e^2 \pm 4gae^3 + ge^4$$
$$hz^5 = ha^5 \pm 5ha^4e + 10ha^3e^2 \pm 10ha^2e^3 + 5hae^4 \pm he^5$$

Subtrahiert man hiervon den früheren Ausdruck ($ca + da^2 + fa^3 + ga^4 + ha^5 +$ usw.), so fällt die erste Spalte der Tabelle fort. Die Differenz läßt sich also in einer Reihe schreiben, die nach Potenzen von e fortschreitet:

$$\pm se + te^2 \pm ue^3 + \text{usw.}$$

worin
$$s = c + 2da + 3fa^2 + \text{usw.}$$
$$t = d + 3fa + 6ga^2 + \text{usw.}$$
$$u = f + 4ga + 10ha^2 + \text{usw.}$$

Die bisherige Betrachtung ist für beliebige Werte von a und e exakt [98]). Nimmt man nun insbesondere an, daß a der genauen Gleichungslösung schon recht nahe kommt, daß e also ziemlich klein ist, so kann man die höheren Potenzen von e, etwa von der 3. an, fortlassen und e angenähert berechnen, indem man $\pm se + te^2$ gleich dem vorhin gefundenen Zahlenwerte $\pm b = A—B$ setzt. Aus der quadratischen Gleichung $\pm b = \pm se + te^2$ ergibt sich ein Näherungswert von $\pm e$, bei dessen Hinzufügung zu a eine verbesserte Annäherung an die genaue Wurzel $a \pm e$ entsteht.

Aus diesen Ausführungen Halleys hat Taylor ersehen, daß, wenn man in einen Ausdruck $A = cz + dz^2 + fz^3 + gz^4 + hz^5 +$ usw. zwei verschiedene Werte von z einsetzt, die sich um die Differenz $\pm e$ unterscheiden, der ganze Ausdruck zwei verschiedene Werte annimmt, deren Differenz sich als eine unendliche Reihe schreiben läßt, die nach Potenzen von e fortschreitet. Taylors eigene Entdeckung erwuchs nun aus der Beobachtung, daß die Koeffizienten dieser Reihe sich aus den Fluxionen des gegebenen Ausdrucks A folgendermaßen leicht bestimmen lassen: Der Koeffizient s der ersten Potenz von e ist genau die 1. Fluxion des Ausdruckes A, wenn man darin für z den ersten Wert a einsetzt: $\frac{dA(a)}{dz}$. Der Koeffizient t der zweiten Potenz von e ist nicht ganz gleich der zweiten Fluxion des Ausdrucks A (oder der ersten Fluxion von s: $\frac{ds(a)}{dz}$), sondern nur gleich der Hälfte davon. Analog ist u nur $\frac{1}{3}$ von $\frac{dt(a)}{dz}$, also $\frac{1}{2 \cdot 3}$ der 3. Fluxion des Ausdrucks A usw. Diese zunächst für ganze algebraische Ausdrücke induktiv gewonnene Erkenntnis hat Taylor sodann auf beliebige Ausdrücke übertragen und deduktiv bewiesen und ist so zu seiner allgemeinen Reihenentwicklung gelangt.

---

[98]) Halley sagt ausdrücklich: a wird so nahe als möglich bei z angenommen, was aber nicht absolut notwendig, sondern nur zweckdienlich ist. Halleys Reihe gilt also im Unterschied von den ebenerwähnten Newtonschen auch für endliche Werte von e.

Daß seine Entdeckung tatsächlich auf diesem Wege zustande gekommen ist, ergibt sich unzweifelhaft aus der ersten Formulierung, die er ihr in dem erwähnten Briefe an Machin gegeben hat. Hier lautet nämlich sein Theorem so:

„α sei eine Zusammensetzung der Potenzen von z und gegebener Größen durch einen endlichen oder unendlichen, rationalen oder irrationalen Ausdruck. β sei die gleiche Zusammensetzung von p und denselben Koeffizienten. z sei $= p + x$ und $\dot{p} = 1 = \dot{z}$[99]). Dann ist

$$\text{XIV. } \alpha - \beta = \frac{\dot{\beta}}{1}x + \frac{\ddot{\beta}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\dddot{\beta}}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{\ddddot{\beta}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 \text{ usw.}$$

$$\text{XV. } \alpha - \beta = \frac{\dot{\alpha}}{1}x - \frac{\ddot{\alpha}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\dddot{\alpha}}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 - \frac{\ddddot{\alpha}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 \text{ usw.,}$$

wo $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$, $\ddddot{\alpha}$ ebenso aus z und den gegebenen Größen gebildet sind, wie $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$, $\dddot{\beta}$ usw. aus p usw.

Wenn also α, β, und eine der Abszissen z oder p gegeben sind, so kann man die andere durch Ausziehen von x, ihrer Differenz, aus dieser Gleichung finden. Oder man kann diese zur Auffindung von α oder β anwenden, wenn z, p und x gegeben sind. Wenn α ein endlicher Ausdruck ist, dann werden alle $\dot{\alpha}$, $\dot{\alpha}$ usw. und β, $\dot{\beta}$ usw. auch endlich sein."

Man erkennt sofort den Zusammenhang mit dem Halleyschen Gedankengang. Auch hier bei Taylor wird die Differenz zweier Werte desselben Ausdrucks durch eine unendliche Reihe dargestellt, nur werden außer den rationalen Ausdrücken auch irrationale, ja sogar „unendliche Ausdrücke", d. h. in Leibnizens Sprache transzendente Funktionen, zugelassen. Halleys a ist Taylors p, Halleys a + e Taylors $p + x = z$ (in heutiger Schreibweise: x_0 und $x_0 + h = x_n$). Halleys Ausdruck A, der den Inhalt seiner gesamten Tabelle umfaßt, wird von Taylor mit α bezeichnet, Halleys Ausdruck B, d. h. die erste Spalte der Tabelle, mit β (in heutiger Schreibweise: $f(x_0 + h)$ und $f(x_0)$). Wie Halleys Reihe nach Potenzen von e fortschreitet, so Taylors Reihe nach Potenzen von $x = z - p$. Auch daß noch eine zweite Reihe mit abwechselnden Vorzeichen für a — e hinzugefügt wird, ist analog; nur hat Taylor, um an der Gleichung $p + x = z$ festhalten zu können, jetzt A mit β, B mit α bezeichnet. Besonders auffallend ist endlich, daß Taylor als erste Anwendung seines Satzes die Möglichkeit der Berechnung von x (Halleys e) nennt, die doch nur dann ausführbar ist, wenn man die Reihe schon nach den ersten Gliedern abbricht, d. h. wenn man sich auf eine Annäherung beschränkt. Damit hängt zusammen, daß Taylor in der Vorbemerkung über den großen Nutzen des Satzes für Berechnungen noch besonders hinzufügt: the only true use of all corrections, und daß er später (1717) in einem eigenen Aufsatze die Anwendung seiner Reihenentwicklung zur genäherten Berechnung von Gleichungswurzeln noch einmal ausführlich dargelegt hat.

[99]) Im Druck bei Bateman steht fälschlich z. Ein anderes Versehen hat Bateman bei der Ortsbezeichnung begangen: „Bifs" muß ergänzt werden „Bifrons", nicht „Bifsons".

Die Fassung der „Methodus incrementorum" weicht von dieser Erstfassung im Briefe an Machin an mehreren Punkten ab, was man am besten erkennt, wenn man die letztgenannte auch in die heutige Schreibweise umsetzt:

$$\text{XIVa. } f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{h}{1} + f''(x_0) \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_0) \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{usw.}$$

$$\text{XVa. } f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + h) \cdot \frac{h}{1} - f''(x_0 + h) \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_0 + h) \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{usw.}$$

oder auch

$$\text{XIVb. } f(x_n) - f(x_0) = f'(x_0) \frac{x_n - x_0}{1} + f''(x_0) \frac{(x_n - x_0)^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_0) \frac{(x_n - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{usw.}$$

$$\text{XVb. } f(x_n) - f(x_0) = f'(x_n) \frac{x_n - x_0}{1} - f''(x_n) \frac{(x_n - x_0)^2}{1 \cdot 2} + f'''(x_n) \frac{(x_n - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{usw.}$$

Vergleicht man damit die Formeln der „Methodus incrementorum", (oben S. 46, IX. und X.) und ihre (teilweisen) Modernisierungen (IXa. und Xa.), so zeigt sich, daß bei diesen garnicht mehr an die Berechnung der Differenz zweier Werte der unabhängigen Veränderlichen v (Halleys e, modern $h = x_n - x_0$) gedacht wird, sondern nur noch an die Berechnung des Funktionswertes $f(x_n)$, der links allein für sich steht und rechts durch $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ usw., also durch die Werte der Funktion und ihrer Fluxionen im Anfangspunkte ausgedrückt wird. Besonders stark ist die Änderung bei X. im Vergleich mit XV.. Während in XV. die Endwerte der Fluxionen herangezogen werden, werden in X. ebenso wie in IX. die Anfangswerte benutzt, dafür aber eine abnehmende statt wachsende Funktion betrachtet.

Alles das bestätigt nur noch, daß Taylor tatsächlich von Halleys Verfahren der angenäherten Berechnung von Gleichungswurzeln ausgegangen ist und es allmählich immer mehr auf die angenäherte Darstellung von Funktionen durch fortschreitende unendliche Reihen übertragen hat; und da nun das von uns festgestellte frühere Stadium der Entdeckung, besonders die Reihe XV., von der Leibnizschen Reihe XI. noch weiter entfernt ist als das spätere Stadium X., so ist keinerlei Zweifel daran mehr möglich, daß Taylor völlig unabhängig von Leibniz auf einem ganz anderen Weg zu seiner Entdeckung gelangt ist.

Aber Taylors Verdienste um die nach ihm benannte Reihe gehen noch über die beiden bisher nachgewiesenen: die selbständige Wieder-

entdeckung und die Erstveröffentlichung, hinaus. Er hat nämlich drittens auch noch die Formulierung und den Beweis der Reihe in mehreren Punkten wesentlich verbessert. Leibniz bevorzugt, wie wir gesehen haben, die alternierende Reihe und die Darstellung des Funktionswertes durch die Reihe der Ableitungen am gleichen Orte. Taylor dagegen stellt die additive Reihe an die Spitze und drückt durch den Funktionswert und die Ableitungen an einer ersten Stelle den Funktionswert an einer zweiten Stelle aus — beides so, wie es sich in der späteren Entwicklung als besser herausgestellt hat. Besonders wichtig ist die zweite Abweichung. Denn da jede beliebige Stelle der Funktion als zweite gewählt werden kann, so haben wir hiermit die Möglichkeit einer Darstellung des gesamten Funktionsverlaufes durch eine einzige unendliche Reihe. Wenn Taylor die Bedeutung dieser Darstellung auch noch nicht in ihrer vollen Tiefe erkannt hat (da er, wie erwähnt, im Gegensatz zu Leibniz unendliche Reihen nur zu Zwecken der Annäherung, nicht der exakten Darstellung gelten ließ), so hat er doch den grundlegenden Wert seiner Entdeckung von Anfang an richtig vorausgesehen. Schon im Briefe an Machin bezeichnet er sie als eine „allgemeine Methode, die Halleys Verfahren der Gleichungslösung auf alle Probleme anwendet, wo der Flächeninhalt gegeben und die Abszisse gesucht ist", und in der „Methodus incrementorum" stellt er sie als einzige allgemeine Integrationsmethode für Differenzen- und Differentialgleichungen dar. Und dabei läßt er sämtliche, nicht nur algebraische, sondern auch transzendente Funktionen schon im Briefe an Machin ausdrücklich als Objekte seiner Reihenentwicklung zu. Seine Formulierung ist also tatsächlich schon ganz allgemein, mit der einzigen Beschränkung, daß er die Darstellung nur für näherungsweise gültig hält.

Auch Taylors Beweis ist gegenüber dem Leibnizschen, obwohl das Prinzip, wie wir gesehen haben, das gleiche ist, doch in einigen Punkten verbessert. Im ersten Teil, wo es sich um endliche Inkremente handelt, kommt Taylor erheblich kürzer als Leibniz zum Endergebnis. Während dieser nämlich die Differenz des ersten und letzten Gliedes der ursprünglichen Zahlenreihe als Summe der sämtlichen ersten Differenzen darstellt, die der Reihe nach aus den Anfangsgliedern der verschiedenen Differenzenreihen berechnet werden, rückt Taylor sozusagen die ganze Rechnung um eine Reihe im Leibnizschen Schema nach oben (oder in seinem eigenen Schema um eine Spalte nach links), d. h. er gewinnt so gleich y_n aus y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$ usw. auf dieselbe Weise, wie Leibniz Δy_n aus Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$ usw., und bedarf nun der Leibnizschen Schlußadditionen der Koeffizienten von $\Delta^l y_0$, also der Summationen $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{l-1}$ für alle l zwischen o und n—1, überhaupt nicht mehr. Auch den Übergang zum zweiten Teil, zu den infinitesimalen Fluxionen, hat Taylor verbessert, indem er für n, d. h. die endliche Anzahl der Inkremente, zunächst $\frac{v}{z}$, d. h. $\frac{z_n - z_0}{\Delta z}$ gesetzt und so die

Limesbildung $n \to \infty$ erleichtert hat (da $n \cdot \Delta z$ immer den gleichen endlichen Wert behält).

Das Schlußergebnis unserer Untersuchung ist demnach, daß Taylor den mit Recht nach ihm benannten Satz zwar nicht als erster, aber ganz selbständig entdeckt und sich durch seine verbesserte Ableitung und allgemeinere Formulierung sowie seine erste öffentliche Bekanntmachung die größten Verdienste um ihn erworben hat. Das Verhältnis zwischen Leibniz und Taylor ist also hinsichtlich dieser speziellen Entdeckung ganz ähnlich dem Verhältnis zwischen Newton und Leibniz hinsichtlich der Infinitesimalrechnung im allgemeinen, für die Leibniz bekanntlich auch nicht das Verdienst der Erstentdeckung, wohl aber das der Erstveröffentlichung und der vervollkommneten Darstellungsweise besitzt.

III. Kapitel.

Die philosophischen Anschauungen Taylors.

Es dürfte bisher kaum bekannt sein, daß der Mathematiker Taylor sich überhaupt mit Philosophie beschäftigt hat. Der Inhalt seiner philosophischen Gedanken ist jedenfalls völlig unbekannt geblieben. Denn der am Schlusse des ersten Kapitels erwähnte Privatdruck aus seinem handschriftlichen Nachlaß ist nicht für die weitere Öffentlichkeit bestimmt gewesen und auch von den Wissenschaftshistorikern gar nicht beachtet worden. Ich will deshalb im folgenden genauer darüber berichten.

Den Hauptteil des von Young herausgegebenen Buches bildet eine Abhandlung Taylors mit dem Titel „Contemplatio Philosophica". Diese Abhandlung ist freilich nur ein Erstentwurf, den der Verfasser in einem größeren Werke weiter auszuführen gedachte, wenn Zeit und Gesundheit es erlaubten. Dies geht schon daraus hervor, daß er an verschiedenen Stellen (S. 58 und 65 des Druckes vom Jahre 1793) eine spätere eingehende Darstellung der in der Abhandlung berührten Probleme, z. B. aus der natürlichen Theologie, verspricht. Ferner bemerkt Young zu Anfang auf Seite 41 ausdrücklich: „Dieser Versuch . . . trägt mehrere Anzeichen . . . dafür, daß er von seinem Verfasser als bloßer Abschnitt oder als Vorrede zu einem umfassenderen Werke betrachtet wurde. Der Herausgeber besitzt viele besondere Schriftstücke von Br. Taylor, die seinen anfänglichen Plan und seine späteren Fortsetzungsabsichten erkennen lassen. Z. B. sollte der Titel ursprünglich lauten: »Einige Überlegungen, die sich auf die Grundsätze der allgemeinen Philosophie beziehen«; und die Abhandlung begann zuerst mit diesen Worten: »Beim Suchen nach Wahrheit scheint mir nichts so sehr zu fehlen wie die Erklärung, was die Natur ist und in welchem Umfang wir zu ihrer Erkenntnis mit Hilfe unserer eigenen natürlichen Fähigkeiten ohne Offenbarung imstande sind.«" Young hat aber von diesen weiteren Entwürfen nichts mehr veröffentlicht; und das geplante größere Werk ist sicher nicht vollendet worden. Wir können deshalb unsere Kenntnis von Taylors philosophischen Anschauungen lediglich aus der „Contemplatio philosophica" schöpfen. Aus diesem Grunde lasse ich eine ausführliche Inhaltsangabe dieses einzigen uns zugänglichen Zeugnisses von Taylors Philosophie folgen.

Die Schrift handelt in der Hauptsache von der Substanz und ihren verschiedenen Arten; diese werden in den einzelnen Abschnitten nacheinander mit allmählich wachsender Ausführlichkeit dargestellt. Ich gebe zunächst eine Gliederung des Gesamtinhalts:

I. Das Wesen der Substanz, ihr ewiges Dasein und ihre veränderlichen Zustände (S. 41—43 des Druckes v. Jahre 1793)

II. Die Zeit als Substanz, deren einzige Wesenseigenschaft die kontinuierliche Ausdehnung (im unräumlichen Sinne) ist; das notwendige Dasein aller Dinge in der Zeit (S. 43—45)

III. Der Raum als Substanz, deren Wesen in der Ausdehnung nach den drei Dimensionen besteht; das notwendige Dasein des Körpers (aber nicht des Geistes) an einem Orte des Raumes (S. 45—48)

IV. Der Körper als Substanz, deren Wesen die Undurchdringlichkeit ist; Kohäsion und Bewegung als zufällige Eigenschaften des Körpers, die äußerer Ursachen bedürfen; das Beharrungsvermögen als notwendige Folge der Undurchdringlichkeit (S. 48—50)

V. Der Geist als Substanz unbekannten Wesens mit den drei Grundfähigkeiten zum Wahrnehmen, Fühlen und Handeln als sekundären Eigenschaften (S. 50—53); Selbstbestimmung der Handlungen durch den Geist, nicht notwendige Verursachung durch die Gefühle (S. 53—55); Gewißheit der Handlungen trotz der Freiheit (S. 55—58); Unräumlichkeit des Geistes, Unerklärbarkeit seiner Wirkung auf Körper (S. 59—62).

VI. Gott als Ursache der Verbindung von Körper und Geist, überhaupt als einziger Bildner und Lenker aller Dinge (S. 62—65); der Streit der Philosophen über Schöpfung und Lenkung der Welt (S. 65—68); Kritik der Lehren von der Schöpfung aus Nichts und der Erhaltung der Existenz als dauernder Schöpfung (S. 68—70); positive Begründung der Lehre von der Lenkung der Naturphänomene durch Gott, z. B. durch die Unmöglichkeit einer mechanischen Erklärung der Gravitation und Kohäsion (S. 70—72); Nichtentscheidung der Frage nach der Ewigkeit oder Geschaffenheit der Materie (S. 72—74); Wichtigkeit der Beseitigung aller unzuverlässigen Schlüsse, besonders bei religiösen Fragen (S. 74—76); Kritik des ontologischen Gottesbeweises (S. 76—80).

Die folgende Darstellung des Einzelinhalts gibt im Text einen möglichst treuen Auszug des Gedankenganges, während in den Anmerkungen das Verhältnis der Taylorschen Anschauungen zu denen seiner Zeitgenossen erörtert wird.

Im ersten Abschnitte definiert Taylor die Substanz als Ding, das aus sich selbst, d. h. durch die Wirklichkeit (reality) seiner eigenen Natur, besteht; um die Substanz im Dasein zu erhalten, ist keine äußere Ursache nötig [100]). Dieses Dasein ist nicht eine Wirkung, son-

---

[100]) Taylor übernimmt wie Descartes die scholastische Definition der Substanz als eines Dinges, das „durch sich ist" und „keines andern Dinges zu seiner Existenz bedarf". Im Gegensatz aber zu Descartes und erst recht zu Malebranche wendet er diese Definition auch auf die untergöttlichen Substanzen, die irdischen Körper und Geister an, ohne die Abschwächung: „keines andern Dinges als Gott". Nach Taylor ist ihr Dasein ebenfalls eine „Aktualität", die sich selbst allein weitererhält, nachdem sie einmal da ist. Und selbst die erste Schöpfung ihres Daseins aus Nichts durch Gott läßt sich nach seiner Überzeugung aus der natürlichen Vernunft, ohne Offenbarung, nicht begründen.

dern eine Tatsache[101]) — eine Wirklichkeit (actuality), die beständig erhalten bleibt, wenn nicht eine positiv wirkende Ursache auftritt, die sie ändert. Daß eine Substanz, die jetzt da ist, weiterhin da ist, wird nicht durch eine wirkliche (actual) Ursache bewirkt, die das Dasein der Substanz durch eine positive Tätigkeit unterhält — etwa ihr (der Sustanz) Dasein fortsetzt, das sonst aufhören und ins Nichts, ins bloße Nichtsein fallen würde, wenn es nicht derartig erhalten würde —, sondern durch die bloße Verneinung einer Ursache, die es zerstört und vernichtet.

Nach dieser Definition besteht eine Substanz durch ihre eigene Natur entweder bis in alle Ewigkeit oder wenigstens solange, bis eine Ursache sie durch eine positive Tätigkeit zerstört; danach muß auch angenommen werden, daß sie von aller Ewigkeit an da gewesen ist und deshalb nicht aus Nichts erschaffen worden ist. Daher scheint die Schöpfung aus Nichts durch das Licht der natürlichen Vernunft ohne Offenbarung nicht beweisbar zu sein[102]). Denn da das Ding aus sich selbst bis heute fortzubestehen vermag, so muß es auch bis gestern und demnach seit aller Ewigkeit so bestanden haben, wie wenn es überhaupt nicht erschaffen worden wäre. Bevor man beweisen könnte, daß eine Substanz aus Nichts erschaffen worden sei, müßte man also zuerst beweisen, daß sie einmal nicht da war; dies aber kann durch das bloße Licht der Natur[102]), wie schon gezeigt wurde, nicht geschehen.

Der erste Abschnitt schließt mit zwei Korollarien:

I. Nach dem Licht der Natur[102]) zu schließen, ist es sehr wahrscheinlich, daß alle Substanzen, wie die Seelen der Engel oder Menschen und die Körper nicht aus Nichts erschaffen wurden, sondern stets da waren; — nicht aus Naturnotwendigkeit, denn eine solche Notwendigkeit gibt es bei ihnen nicht, sondern durch bloße Tatsächlichkeit[101]).

II. Nach dem Licht der Natur[102]) zu schließen, ist es sehr wahrscheinlich, daß die Seinsweisen (modi) und Zustände der Substanzen die bloßen Gegenstände tätiger Kräfte und nicht das Dasein der Substanzen selbst sind[103]).

In den folgenden Abschnitten werden der Reihe nach die einzelnen

---

[101]) Im Zufriedensein mit der bloßen Tatsache, die nicht noch weiter notwendig verursacht zu sein braucht und auch nicht weiter vernünftig erklärt werden kann, zeigt sich der typisch englische Sinn für „matters of fact".

[102]) In dieser Berufung auf das „Licht der Natur oder Vernunft" zeigt sich der erste Einfluß des sog. „Cambridger Platonismus" und seiner rationalen Theologie. Als Taylor in Cambridge studierte, waren zwar Benj. Whichcote, Henry More und Ralph Cudworth schon tot, aber ihre Weltanschauung lebte bei Newton und vielen anderen noch fort.

[103]) Taylor unterscheidet wie Descartes Attribute und Modi, d. h. wesentliche und zufällige Eigenschaften der Substanzen. Nur die letzteren sind durch die äußere Wirksamkeit von Naturkräften zu erklären, während die ersteren zum inneren Wesen der Substanzen selbst gehören und in ihrem eigenen Dasein begründet sind.

Substanzen behandelt. An erster Stelle nennt Taylor die Zeit[104]). Diese ist nach ihm eine Substanz, deren Wesen in einer gewissen Eigenschaft (attribute) besteht, für die wir keinen besonderen Namen haben; wir nennen sie vielmehr mit einem vom Räumlichen auf das Zeitliche übertragenen Ausdrucke: Ausdehnung; demnach ist Zeit eine Größe (Quantität), die Teile neben Teilen hat; Zeitalter, Jahre, Monate, Wochen, Tage, Stunden usw. unterscheiden sich voneinander durch ihre verhältnismäßige Länge. Zeitliche Ausdehnung ist die einzige Wesenseigenschaft (attribute) der Zeit; diese ist daher vollkommen gleichförmig und sich ähnlich, notwendig bestehend, unveränderlich und untätig. Alles andere Seiende besteht in der Zeit; was in keiner Zeit besteht, ist überhaupt nicht da. Die Dinge vermögen die Natur des Teils der Zeit, in dem sie bestehen, durchaus nicht zu beeinflussen oder zu ändern.

Wann, dann, jetzt usw. sind Ausdrücke, die sich auf die einzelnen Teile der Zeit beziehen, in denen die Dinge ihr Dasein haben. Früh, bald, spät, zuerst, zuletzt usw. sind Ausdrücke, die die Ordnung der Dinge in der Zeit angeben. Alt, jung usw. geben die Quantität der Zeit an, die durch die Fortdauer der Dinge in der Zeit beansprucht wird. Fortdauer im ursprünglichen Sinne ist der Unterbrechung entgegengesetzt und bezeichnet die unmittelbare Verbindung von Teilen irgendeines Dinges. In diesem Sinne ist die Zeit etwas beständig Fortdauerndes (a continuum); sie dauert fort, da ihre Ausdehnung nicht unterbrochen ist. Manchmal versteht man aber unter Dauer auch die lückenlose Ausfüllung eines Teiles der Zeit. In diesem Sinne ist Dauer kein Zustand der Zeit (oder ein anderer Name für sie), sondern der Zustand der Dinge, auf Grund dessen sie als zeitfüllend betrachtet werden. Das Ding dauert, das einen Teil der Zeit ausfüllt, nicht aber der Teil der Zeit selbst.

Die absolute Natur der Zeit ist unendlich; darin enthalten sind ihre endlichen Teile, mit denen man die Dauer der Dinge mißt.

Im dritten Abschnitt definiert Taylor entsprechend den Raum[105]) als Substanz, deren Wesen in der Ausdehnung nach allen Richtungen besteht. Ausdehnung im ursprünglichen Sinne ist die Eigenschaft von Linien; im weiteren Sinne wird der Ausdruck aber auch gebraucht, um die Arten von Größen zu bezeichnen, die den Flächen oder geometrischen Körpern zukommen. Eine Linie ist nur in einem Sinne, nämlich in der Länge, ausgedehnt. Eine Fläche hat einen höheren Grad der Ausdehnung, nämlich in die Länge und Breite. Ein geometrischer Körper oder Raum ist in jeder Hinsicht ausgedehnt, nämlich in die Länge, Breite und Dicke. Der Raum ist nichts anderes als

---

[104]) Die Lehre, die der Zeit und dem Raume nicht nur Realität, sondern sogar Substanzialität zuschreibt, übernimmt Taylor von Henry More. Damit steht er, ähnlich wie Newton und andere englische Naturphilosophen, im schärfsten Gegensatze zu Leibniz, der z. B. in seinem Briefwechsel mit Clarke Zeit und Raum als bloße ideale Ordnungen des Nach- und Nebeneinanderseins der phänomenalen Dinge bezeichnet.

[105]) Daß der Raum die göttlichen Eigenschaften der Naturnotwendigkeit, Ewigkeit und Unendlichkeit besitzt, ist von Henry More besonders nachdrücklich hervorgehoben worden.

die ausgedehnte Substanz; seine einzige wesentliche Eigenschaft ist die Ausdehnung.

Der Raum besteht notwendigerweise und ist daher ewig; er ist nicht tätig und nicht leidend und unendlich in der ihm eigentümlichen Ausdehnung wie die Zeit in der ihrigen. Alle endlichen Räume sind im unendlichen Raum enthalten wie die Teile der Zeit in der unendlichen Dauer, d. h. wie partes integrantes im totum integrale.

Taylor erklärt sich aber gegen die Lehre einiger Philosophen [106]), daß der Raum der Ort aller Dinge sei, der Geister ebensowohl wie der Körper, und wirft den Vertretern dieser Lehre vor, daß sie ihrer Phantasie und Einbildungskraft zu viel nachgäben, statt sich der reinen Vernunft zu bedienen, die über die Sinnesempfindungen und Phantasievorstellungen zu urteilen und von ihnen zu abstrahieren vermöge. Der Raum ist nur der Ort der Körper; sie allein können hier, dort, nirgends, groß, klein usw. sein, sie allein sind räumlich ausgedehnt und vermögen den Raum zu erfüllen. Andere, nicht körperliche Wesen können sich nicht an einem Orte befinden und nicht groß oder klein sein, da diese Begriffe sich auf die Größe der Ausdehnung beziehen und die nicht körperlichen Dinge sich zur Ausdehnung wie Töne zu Farben verhalten.

Ähnlich wie alle Dinge in der Zeit sind die Körper im Raume und füllen ihn aus, ohne daß der Ort durch den darin befindlichen Körper beeinflußt oder geändert wird oder auch umgekehrt [107]).

Im vierten Abschnitt definiert Taylor sodann den Körper im Unterschied vom Raume als Substanz, deren alleinige Wesenseigenschaft die Dichte [108]) ist; diese muß allerdings notwendigerweise im Raum bestehen. Vermittelst der Dichte erfüllt ein Körper einen Raum und schließt dadurch alle anderen Körper solange von diesem Orte aus, als er dort ist. Faßt man Dichte derart auf, so unterscheidet sie sich offenbar von Festigkeit; letztere ist Festigkeit mit Kohäsion der Teile; bloße Dichte aber kann mit oder ohne Kohäsion vorkommen: Wasser ist ebenso dicht wie Stein, aber Wasser hat nicht dieselbe Festigkeit wie Stein.

Mit seiner Dichte füllt jeder Körper einen Teil des Raumes aus, der ihm in der Größe (quantity) gleichkommt. Der Körper, der so den Raum erfüllt, ist ausgedehnt. Doch ist die Ausdehnung eigentlich nicht eine Eigenschaft des Körpers, sondern des Raumes, dessen Ort

---

[106]) Hier wendet sich Taylor vor allem gegen More, der auch den geistigen Substanzen einen Ort und eine Ausdehnung im Raume zuschreibt. In dieser Hinsicht hält Taylor an Descartes' Dualismus der ausgedehnten und nichtausgedehnten Substanzen fest. Auch Malebranche, den Taylor durch seinen Freund Montmort genauer kennt, läßt den Raum nur den Ort der Körper sein, dagegen Gott den „Ort der Geister".

[107]) Dieser Satz leitet zum folgenden Abschnitt über. Obwohl Taylor mit Descartes und gegen Leibniz den Raum zum Wesen der körperlichen Substanz in die engste Beziehung setzt, macht er doch mit den meisten englischen Philosophen und gegen Descartes zwischen Raum und Körper einen scharfen Unterschied: Der Körper ist eine zweite Substanz im Raume, die dessen „Ausdehnung" mit ihrer „Dichte" ausfüllt, wie im folgenden, IV. Abschnitt weiter ausgeführt wird.

[108]) Wir sagen dafür „Undurchdringlichkeit".

er füllt. Vom Körper sagt man, er sei ausgedehnt, weil seine Teile voneinander entfernt sind; von diesen Teilen sagt man, sie seien voneinander entfernt, weil sie an verschiedenen Orten sind. Diese Verschiedenheit des Ortes wird Entfernung genannt. Ausdehnung und Entfernung gehören somit ursprünglich und der eigenen Natur nach zum Raume, zum Körper aber nur um des Raumes willen.

Die Idee der Dichte ist nicht notwendig, sondern zufällig; denn es ist kein Widerspruch, sondern eine augenscheinliche Möglichkeit, die Idee der Dichte zu denken, gleichzeitig aber anzunehmen, daß in der Wirklichkeit kein dichtes Ding vorhanden ist. Es ist gleich möglich, den Körper als seiend und als nicht seiend zu denken. Das Wesen des Körpers ist also gleichgültig (indifferent) gegen Sein und Nichtsein [109]); daher ist ein Körper nicht notwendig seiend und daher auch nicht notwendig unendlich.

Hieraus wieder folgert Taylor, daß die endlichen Teile eines Körpers verschiedene, ganz voneinander unabhängige Substanzen sind. Sie hängen daher nicht notwendigerweise durch ihre eigene Natur zusammen. Folglich ist die Kohäsion eine Erscheinung, die einer äußeren Ursache zu ihrer Erklärung bedarf; sie ist eine dauernde Wirkung, die aufhören würde (so daß dann der Körper nicht mehr fest wäre), wenn diese Ursache aufhören würde zu wirken.

Eben deshalb ist der Körper bewegungsfähig. Die Bewegung wird an die Körper nach den Naturgesetzen mitgeteilt, die Wren, Wallis und Newton dargelegt haben. Das Beharrungsvermögen (vis inertiae) ist nichts Positives, das von der Natur des Körpers verschieden wäre oder zu ihr noch hinzukäme, sondern nur die notwendige Folge der Eigenschaft, daß zwei verschiedene Körper nicht an demselben Orte zur selben Zeit sein können. Der Körper ist seiner Natur nach vollständig untätig [110]); wenn ein ruhender Körper in Bewegung kommen soll oder umgekehrt, muß also eine bestimmte äußere Ursache dieser Erscheinung vorhanden sein; denn das Ding selbst vermag keine Bewegungsänderung hervorzurufen.

Während die drei bisher behandelten Arten der Substanz uns ihrem Wesen nach genau bekannt sind, haben wir, wie Taylor im fünften Abschnitt hervorhebt, von der geistigen Substanz nur eine sehr unvollkommene Kenntnis. Wir haben keinen Begriff vom Wesen des Geistes [111]), sondern nur Erfahrung von den geistigen Vorgängen. Den Namen Geist geben wir unseren eigenen Seelen und nehmen an, daß die Engel und Gott von derselben Art sind. Denkt man über das nach, was in uns selbst geschieht, so findet man, daß der

---

[109]) Während der Raum nach dem III. Abschnitt notwendig existiert, existiert die Körperwelt nur tatsächlich, ihrem Wesen nach könnte sie ebensowohl nicht sein wie sein.

[110]) Die Lehre, daß die Körper an sich ganz passiv sind und ihre Bewegung nur durch Mitteilung von außen empfangen, übernimmt Taylor von den Cartesianern, während nach Leibniz alle Substanzen ihrem Wesen nach aktiv sind.

[111]) In dieser Hinsicht schließt sich Taylor an Malebranche an. Nach Descartes, More und andern haben wir auch eine klare und deutliche Idee vom Wesen des Geistes.

Geist der folgenden drei Dinge fähig ist: Wahrnehmung, Empfindung (= Gefühl) und Tätigkeit[112]). Wir sehen und begreifen die Dinge durch Wahrnehmung; wir fühlen und bemerken Lust und Schmerz durch Empfindung; alles, was wir tun, leisten wir durch Tätigkeit. Die Philosophen haben gewöhnlich zwei Fähigkeiten des Geistes angenommen, den Verstand, durch den wir die Dinge wahrnehmen, und den Willen, durch den wir handeln. Aber bei dieser Einteilung der Geisteskräfte hat man nicht hinreichend Sorge getragen, alles, was in uns vorgeht, deutlich zu unterscheiden. Denn Empfindung (= Gefühl) und Wahrnehmung sind, obgleich der Geist bei beiden passiv ist, sicher vollkommen verschieden. Z. B. ist es sicher etwas ganz anderes, wahrzunehmen, daß 2 und 2 gleich 4 ist, und froh oder traurig zu sein.

Alles dieses nehmen wir (innerlich) wahr und wissen, daß es in unserem Geist vor sich geht. Aber wir wissen nicht, was für eine Eigenschaft oder Wesenheit unseres Geistes ihn dazu fähig macht. Wir können uns vorstellen, daß die Seele ohne Ausübung der genannten drei Fähigkeiten existiert, ebenso wie ein Körper ohne Bewegung, obgleich wir von ihr in diesem Zustand keine Idee haben, wie wir sie von einem ruhenden Körper besitzen. Wir haben nämlich keine Kenntnis vom Wesen der Seele, sondern nur von ihren sekundären Eigenschaften; mittels dieser kennen wir die Tatsache ihrer Existenz, vermögen aber ihr Wesen nicht zu erkennen. Man nimmt diese Fähigkeiten als von einander ganz verschiedene Dinge wahr; daher ist es schwer zu erkennen, wie sie in derselben Natur zusammenhängen und daraus hervorgehen.

Es ist unsinnig, nach einer physikalischen Ursache der Tätigkeit des Geistes zu fragen, wie man es beim Beginn der Bewegung eines Körpers tut. Denn der Körper kann sich nicht selbst bewegen, die Tätigkeiten des Geistes aber stammen aus ihm selbst. Deshalb dürfen wir nicht nach ihrer (äußeren) Ursache fragen; denn das würde so viel heißen, wie leugnen, daß der Geist ein tätiges Wesen ist, und daß es so etwas wie Tätigkeit in rerum natura (d. h. im Wesen der Dinge) gibt. Der Geist fühlt sich selbst unbehaglich[113]) in seinem gegenwärtigen Zustande und sieht, welche Tätigkeit seines eigenen Willens diese Unbehaglichkeit beseitigen kann; daher ist es vernünftig zu erwarten, daß er diese Tätigkeit ausübt. Aber er tut das doch nicht notwendigerweise; es ist nicht eine physische Folge dieses Gefühls der Unbehaglich-

---

[112]) Die Ersetzung der Zweiteilung der Seelenvorgänge (Denken und Wollen) durch die Dreiteilung (Wahrnehmen, Fühlen, Handeln) wird in der Geschichte der Psychologie erst Sulzer (1751) und Mendelssohn (1755) zugeschrieben, nach Anfängen in der englischen Moralphilosophie (Shaftesbury, Hutcheson, Home). In diesem Punkte hebt Taylor mit vollem Rechte seine Originalität hervor. — Seine Terminologie weicht von der heutigen ab, stimmt aber mit der von Sulzer und Mendelssohn überein: unter „Empfindungen" versteht er wie sie Gefühle oder Gemütsstimmungen, während er Sinnesempfindungen als „Wahrnehmungen" bezeichnet.

[113]) Zur Lehre vom Gefühl der Unbehaglichkeit als Anlasses der Tätigkeit vergl. Lockes Essays concerning human understanding, Buch II, Kap. 20, § 6; Kap. 21, § 29—40, und Leibniz, Nouveaux essais sur l'entendement, an den gleichen Stellen.

keit und dieser Wahrnehmung der eigenen Kraft; sondern diese Tätigkeit ist die bloße Wirkung der eigenen Selbstbestimmung des Geistes, der keine naturnotwendige Ursache vorausgeht, sondern die ausgeübt werden könnte oder nicht, ungeachtet allen Einflusses des Bewußtseins oder Gefühls, das der Geist hat. Es ist schwer, eine Erklärung zu finden, weshalb ein Wesen, das kein Gefühl hat, in einem besonderen Fall eher tätig als untätig sein soll; aber jedenfalls ist es möglich, und es ist nicht notwendiger, daß dieses Wesen nicht handelt, als daß es handelt. Herr Leibniz glaubt, es würde in diesem Falle keine Handlung stattfinden, aber er bringt keinen Beweis dafür, sondern nur eine eigene Hypothese [114]); er setzt also, genau besehen, die Frage unberechtigterweise schon als entschieden voraus. Ich sage, die Leute handeln meistens nach dem, was das beste für sie ist, aber durchaus nicht immer, denn jeder fühlt sich manchmal doch bewogen, ein kleineres, gegenwärtiges und vorübergehendes Gut einem wesentlicheren und dauernderen vorzuziehen. Als Grund dafür kann man nur die Selbstbestimmung der Tätigkeit angeben. Es ist zwar unvernünftig, auf ein größeres Wohl um eines geringeren willen zu verzichten. Aber wir sehen, daß es vorkommen kann und auch tatsächlich schon oft vorgekommen ist. Diese Fähigkeit, selbsttätig zu handeln, ist die Grundlage aller Sittlichkeit.

Diese Selbsttätigkeit des Geistes spricht dafür, daß seine Handlungen ganz frei und nicht notwendig, sondern nur möglich sind. Und so ist es auch in der Tat. Der Geist übt nie eine Tätigkeit aus, die er nicht auch zu unterlassen vermöchte, selbst wenn er genau dieselbe Wahrnehmung und dasselbe Gefühl von allen Umständen hätte, deretwegen er sich selbst zu dieser Tätigkeit bestimmt. Wegen dieser völligen Handlungsfreiheit halten die meisten Menschen die Handlungen des Geistes für ganz zufällig und ungewiß. Bei genauer Betrachtung findet man aber, daß die Tätigkeit des Geistes zwar zufällig ist (wenn man Zufall als Gegensatz zur Naturnotwendigkeit auffaßt, d. h. zu dem, was unmittelbar aus der Natur des Gegenstandes fließt, wie z. B. die gleichförmige Bewegung des Körpers), daß sie aber trotzdem weit von der Ungewißheit entfernt, ja im höchsten Grade gewiß ist [115]). Wo die Weisheit des Handelnden vollkommen ist, da wird er sicher der rechten Vernunft folgen. Es ist auch sicher, in welcher Weise er der rechten Vernunft folgen wird, und daher auch, wie er bei irgendeiner Gelegenheit handeln wird. Aber zugleich sind seine Handlungen doch ganz frei und selbstbestimmt, also in der Tat zufällig und nicht naturnotwendig; denn er vermag anders zu handeln, als er es tut, obgleich es sicher ist, daß er es nicht

---

[114]) Leibniz lehrt an den in Anm. 113 genannten Stellen, daß der Wille des Menschen immer determiniert ist, wenn nicht durch bewußte, so durch unterbewußte Wahrnehmungen und Gefühle (petites perceptions, petites sollicitations, inapperceptibles).

[115]) Taylor glaubt sich hier fälschlich im Gegensatz zu Leibniz zu befinden. Auch dieser lehrt nicht die äußere, sondern die innere, selbsttätige Determination, nicht die zwingende physische oder sogar metaphysische Notwendigkeit, sondern die nur „geneigt machende", aber trotzdem sichere und unfehlbare psychische Bestimmung der menschlichen Handlungen.

will. Was in der Natur irgendeines Handelnden die Ursache dieser absoluten Gewißheit sein kann, das können wir nicht erkennen; denn wir haben keine Erkenntnis vom Wesen des Geistes, in der diese Gewißheit begründet ist. Daher müssen wir auch von den Taten solcher Wesen, deren Weisheit weniger vollkommen ist, behaupten, daß sie in demselben Sinne wie die der Vollkommeneren gewiß sein können, obwohl sie ganz frei und der Sittlichkeit unterworfen sind. Wir wissen jedenfalls nicht genug von der Natur des Geistes, um die Unmöglichkeit zu behaupten; im Gegenteil, das Vorherwissen Gottes, von dem wir das hinreichendste Zeugnis haben, scheint zum Beweis der Möglichkeit zu genügen.

Trotz dieser unvollkommenen Kenntnis von unserem Geist erkennen wir doch aus dem, was in uns vorgeht, mit Evidenz unser eigenes Dasein sowie die Unteilbarkeit[116]) des Geistes im strengsten Sinne. Der Geist ist so wesentlich eins, daß er in keinem Sinne in mehrere integrierende Teile zerlegt werden kann, wie etwa Raum und Zeit. Daher ist augenscheinlich, daß der Geist nicht ausgedehnt ist und folglich nicht im Raum existiert[106]), sondern in einer uns ganz unbegreiflichen Weise. Der Geist erfüllt weder den Raum, noch ist er ein physikalischer oder mathematischer Punkt, noch befindet er sich irgendwie an einem Ort. Sagt man vom Geist, er sei an einem Orte, oder er sei einem Orte oder Körper gegenwärtig, oder Dinge seien in ihm (wie Paulus sagte, daß wir in Gott leben, weben und uns bewegen), so dürfen diese Ausdrücke nur in übertragenem Sinne aufgefaßt werden, nämlich als eine Gegenwart der Kraft nach, durch die der Geist fähig wird, den Raum und die Körper in ihm wahrzunehmen sowie die Bewegung und Ruhe von Körpern zu bewirken.

Welche Wesenseigenschaft des Geistes ihn hierzu befähigt, wissen wir freilich wieder nicht. Wir wissen weder, wie unsere Seele auf unseren Körper einwirkt, noch wie sie durch den Körper beeinflußt wird[117]). Wir wissen nicht, wieviel vom Körper unmittelbar an der Verbindung mit der Seele teilnimmt, wenn es auch nach den Feststellungen der Anatomie wahrscheinlich nur ein kleiner Teil im Gehirn ist[118]). Wir wissen nicht, woher es kommt, daß wir nicht dieselbe Verbindung mit allen Körpern haben können, wie wir sie mit diesem kleinen Teil des Gehirns haben; ferner daß wir die Dinge nicht direkt wahrnehmen, sondern durch ein instinktives oder gewohnheitsmäßiges Urteil aus den Ideen erschließen, die in unserem Geiste von den Dingen durch die Bewegung dieses Teils des Gehirns erweckt werden. Von diesen und vielen anderen Dingen, die in uns vorgehen, wissen wir nicht, wie sie gemacht werden; aber wir wissen, daß sie nicht durch unsere eigene Selbsttätigkeit bewirkt werden; denn viele dieser Dinge ereignen sich entgegen unserem Wunsche und trotz allen Widerstan-

---

[116]) „individual" ist hier im ursprünglichen Sinne als Übersetzung des griechischen ἄτομος zu verstehen.

[117]) Beim Problem des Zusammenhanges von Leib und Seele nimmt Taylor den Standpunkt des Okkasionalisten Malebranche ein, nach dem Gott der wahre Urheber der Übereinstimmung zwischen den Vorgängen im Körper und im Geiste ist, die aus diesen selbst nicht erklärbar ist.

[118]) Taylor denkt an Descartes' Zirbeldrüsenhypothese.

des, den wir gegen sie leisten. Und wir wissen auch, daß sie nicht durch die bloße Natur der Dinge, nämlich unseres Geistes und Körpers, geschehen; denn in diesem Falle müßte unsere Verbindung mit allen Körpern gleichmäßig sein, wir müßten sie beliebig von einem Körper auf den anderen übertragen können. Also ist es augenscheinlich, daß diese Verbindung durch eine äußere Ursache bewirkt wird, nämlich durch ein wirkendes (agent) Wesen, das Macht über Geist und Körper hat und Einfluß auf sie ausübt zu Zwecken, die ihm selbst wohlbekannt sind.

Damit geht Taylor zum sechsten und letzten Abschnitt über, der von der höchsten Substanz handelt, nämlich von Gott. Denn niemand sonst als dieser ist das wirkende Wesen, das in solcher Weise auf uns und alle Dinge Einfluß übt, sei es unmittelbar durch sich selbst, sei es mittelbar durch uns unbekannte Wesen als seine Werkzeuge [119]). Aus den Bewegungen unseres eigenen und anderer Körper, aus den Flüssigkeits- und Festigkeitssymptomen, aus der Schwere, der Fortpflanzung des Schalls und der Verbreitung des Lebens in der ganzen sichtbaren Welt läßt sich mit höchster Wahrscheinlichkeit schließen, daß es ein und derselbe Gott ist, der alles so eingerichtet hat und regiert. Mehr aber als dies und, was daraus notwendig folgt, läßt sich über Gott durch das bloße Licht der Natur nicht erkennen. Was wir sonst noch wissen, verdanken wir seiner gnädigen Offenbarung. Durch das Licht der Natur können wir nur wissen, daß, aber nicht wie Gott die Welt erschaffen hat und sie regiert. Wir kennen nur die Tatsache, von seinem Wesen wissen wir nichts. Doch darüber brauchen wir uns nicht zu wundern, da wir ja nicht einmal das Wesen unserer eigenen Seele kennen.

Taylor kritisiert die unzulässige Schlußweise mancher Philosophen, die unter Mißbrauch gewisser Ausdrücke wie Vollkommenheit allerlei schwer verständliche Sätze über die Allmacht, Allwissenheit und unendliche Güte Gottes, über die Einfachheit seiner Natur, seine Selbstexistenz usw. zu begründen versuchen [120]). Nach Taylor wissen wir durch unsere bloße Vernunft sicher nur dies: 1. daß Gottes Macht sich auf alle Dinge erstreckt, die ihrer Natur nach mögliche Gegenstände der Macht sind; dies können wir mit Recht Allmacht nennen; 2. daß seine Erkenntnis sich auf jedes Ding erstreckt, das Gegenstand der Erkenntnis sein kann; dies nennt man richtig Allwissenheit; 3. daß seine Güte sich auf alle fühlenden Geschöpfe erstreckt; denn die Betrachtung der Zweckursachen zeigt, daß die ganze Einrichtung (oeconomy) der Welt auf die Schaffung des größten mit ihrer Natur verträglichen Glückes ausgeht. Soviel wissen wir über Gottes Eigenschaften durch die bloße Kraft unserer Vernunft. Und hinsichtlich unser selbst vermögen wir die uns obliegende Verpflichtung zu erkennen, bei allen unseren Handlungen auf seinen Willen Rücksicht zu nehmen, so weit uns dieser bekannt ist. Auf diese vier Punkte beschränkt sich die sog. natürliche Religion.

[119]) Taylor denkt an die „plastischen Kräfte" von More und Cudworth, wie sein späteres Zitat zeigt.

[120]) Taylor denkt an den ontologischen Gottesbeweis; s. den Schluß der Abhandlung.

Anschließend gibt Taylor nun eine Übersicht über die verschiedenen Meinungen der Philosophen betreffs der Schöpfung und Regierung des Weltalls. Hinsichtlich der Weltschöpfung unterscheidet er: 1. den völligen Atheismus; 2. die Lehre, daß alle Substanzen der Materie nach von Ewigkeit her bestanden haben, daß aber ihre gegenwärtige Ordnung nur von einem Gott hergestellt sein kann; 3. die Lehre, daß alle Substanzen außer Gott selbst von ihm aus Nichts erschaffen sind.

Hinsichtlich des Weiterbestehens und der Regierung der Welt unterscheidet Taylor die folgenden Ansichten: Einige Philosophen glauben, daß die Substanzen, wenn sie einmal da sind, durch die in der Schöpfung empfangenen Kräfte aus ihrer eigenen Natur fortdauern. Andere glauben, daß die Substanzen durch eine positive Tätigkeit des Schöpfers, nämlich durch eine fortgesetzte Schöpfung, im Dasein erhalten werden. Unter den letzteren gibt es einige, die noch eine weitere fortgesetzte Tätigkeit des Schöpfers (oder einer untergeordneten als Werkzeug dienenden bildenden Kraft)[121]) annehmen, um nicht nur das substantielle Dasein, sondern auch den gegenwärtigen Zustand der Dinge zu erhalten. Andere dagegen lassen außer der Erhaltung der Existenz alles Sonstige allein durch die Naturkräfte geschehen und meinen, die Allweisheit Gottes zeige sich nur darin, daß er am Anfang der Welt jedes Ding in so wunderbarer und schöner Weise geordnet habe. Letzteres ist die Ansicht der Cartesianer und des Malebranche, besonders hinsichtlich der materiellen Welt. Leibniz dehnt diese Ansicht noch weiter auf alle untergöttlichen Wesen aus, auf die Geister ebensowohl wie die Körper. Ja, er versteigt sich sogar zu der Behauptung, daß es keine wirkliche Verbindung zwischen Geist und Materie geben könne (bloß weil e r nicht einsehen kann, wie sie zustande kommt); dementsprechend lehrt er, daß die Phaenomene der Geister und der Körper miteinander übereinstimmen und sich entsprechen lediglich wegen der vorherbestimmten Harmonie, die Gott bei der Schöpfung festgelegt hat[122]).

Nach Taylors Überzeugung lehren fast alle diese Philosophen Dinge, die sie nicht beweisen können und leisten damit, gegen ihre Absicht, den Atheisten Vorschub; denn diese brauchen, um die Reli-

---

[121]) Die „plastische Kraft" der Cambridger Platoniker, auf die Taylor schon einmal angespielt hat (s. Anm. 119), soll die Zweckordnung in der Natur verständlich machen.

[122]) Durch seine Voreingenommenheit gegen Leibniz als Gegner Newtons läßt Taylor sich verführen, Leibniz hier besonders scharf zu kritisieren, obwohl dieser beinahe dasselbe lehrt, wie er selbst, nämlich daß die Verbindung zwischen den körperlichen und geistigen Substanzen aus ihrer eigenen Natur nicht erklärt werden kann und daher auf die Wirksamkeit Gottes zurückgeführt werden muß. Taylor dürfte von seinem Standpunkte aus höchstens kritisieren, daß Leibniz Gottes Wirksamkeit nur als eine P r ä stabilisierung bei der Weltschöpfung auffaßt, während Taylor sie beständig weiter dauern läßt. Aber vom Standpunkte Leibnizens aus ist das gar kein absoluter Gegensatz. Denn für Gott gibt es überhaupt keine verschiedenen Zeiten, er wirkt alles im gleichen „Jetzt der Ewigkeit". Wir Menschen aber müssen es uns so vorstellen, daß Gottes einmalige Schöpfung sich durch alle Zeiten weitererstreckt, also auch in jedem Augenblicke die Verbindung zwischen Körper und Geist wieder neu schafft — wie Taylor lehrt.

gionsysteme jener umzuwerfen, nichts zu tun als ihre unbewiesenen Behauptungen nicht zuzugeben. Am schlechtesten begründet sind nach Taylor die Systeme, die eine ursprüngliche Schöpfung aus Nichts oder gar eine fortgesetzte Schöpfung annehmen. Denn das erstere ist durch das Licht der Natur völlig unbeweisbar, weil nicht einmal vernünftig bewiesen werden kann, daß eine jetzt bestehende Substanz jemals nicht bestanden hat. Das letztere aber widerspricht sogar den allgemeinen Grundüberzeugungen der Menschheit, nach denen Körper und Geist Substanzen sind, die keiner äußeren Ursache zu ihrer Erhaltung bedürfen, sondern aus sich selbst weiterbestehen [100]). Deshalb lehnt Taylor den Cartesianismus (und erst recht seine Verschärfung, den Leibnizianismus) als gänzlich ungeeignete Grundlage der natürlichen Religion ab.

Der einzige Weg zu ihrer sicheren Begründung ist nach Taylor der Nachweis, daß ein Gott nötig ist, nicht um die Substanz, aber die Phänomene der Natur hervorzubringen. Man muß zeigen, daß es unmöglich ist, diese aus der bloßen Natur der Materie zu erklären. Als Beispiele wählt Taylor die Gravitation und Kohäsion [123]). Da die Materie nur durch Ortsbewegung etwas bewirken kann, so müßte man annehmen, daß jene Phänomene durch die rasche Bewegung einer Flüssigkeit erzeugt würden. Um insbesondere die Schwere zu erzeugen, müßte diese rasche Bewegung nach dem Mittelpunkt gerichtet sein, zu dem die schweren Körper streben. Aber eine solche konvergierende Bewegung einer Flüssigkeit ist unmöglich und würde, wenn sie auch einmal anfinge, sogleich durch den gegenseitigen Widerstand der Flüssigkeitsteile wieder aufhören. Also kann die Schwere nicht rein mechanisch erklärt werden. Das Gleiche gilt aber auch von der Kohäsion. Denn wenn diese mechanisch verursacht sein sollte, so müßte es durch einen Druck geschehen, der durch die Bewegung einer umgebenden Flüssigkeit verursacht würde. Aber ein solcher Druck kann nicht bewirken, daß Teilchen zusammenhaften, die nicht schon hart sind, kann also keine Härte ursprünglich erzeugen. Außerdem gibt es nach den allgemein bekannten Bewegungsgesetzen keinen solchen Druck. Also kann weder Kohäsion noch Gravitation durch die Mechanik allein erklärt werden. Noch viel weniger aber ist das möglich bei zusammengesetzteren Naturerscheinungen, wie der Bildung und dem Wachstum von Mineralien, pflanzlichen und tierischen Substanzen, den Bewegungen und dem Leben von Tieren usw. Überall drängt sich uns hier die Notwendigkeit einer Vorsehung auf, die all dies in einer uns unbekannten Weise bewirkt und die Natur des Menschen wie die ganze Schöpfung zweckmäßig ordnet. Das ist nach Taylors Ansicht die sicherste und festeste Grundlage der natürlichen Religion.

Dagegen betont er zum Schluß noch einmal — auch gegenüber dem „Intellectual System" von Cudworth, dem er sonst sehr nahe

---

[123]) Taylors Kritik richtet sich hier wieder zugleich gegen die Cartesianer und gegen Leibniz, die alle Naturphänomene mechanisch, durch Druck und Stoß von materiellen Korpuskeln, erklären. Taylor dagegen steht auf dem Standpunkte Newtons, der insbesondere die Gravitationserscheinungen auf eine Attraktionskraft zurückführt, die nur metaphysisch, durch die Allgegenwart Gottes im Raume, weiter erklärbar ist.

steht —, daß die Lehre, die Gott über die Ordnung der Phänomene hinaus auch die Schöpfung der Substanzen aus Nichts zuschreibt, nicht in die natürliche Theologie hineingehöre. Cudworth nennt solche Philosophen, die die Materie für gleich ewig wie Gott halten, unvollkommene Theisten, weil sie, wie er glaubt, Gottes Allmacht beschränkten. Taylor dagegen meint, es liege dabei gar keine geringere Ansicht über die Allmacht zugrunde, sondern der Unterschied sei lediglich, daß Cudworth glaube, die Allmacht schließe auch die Fähigkeit der Erzeugung der Materie aus Nichts und ihrer Verwandlung in Nichts ein, während die anderen es davon ausschlössen, weil sie es als widersprechenden Gedanken zu erkennen glaubten und etwas Unmögliches (genau wie Cudworth) auch der Allmacht nicht zuschreiben könnten. Taylor hält die Ansicht der von Cudworth kritisierten Philosophen für wahrscheinlicher, wenn man sich auf die bloße Vernunft ohne Offenbarung stützt, lehnt aber die positive Entscheidung für die eine oder andere Ansicht ab, da die Vernunft allein hierzu nicht ausreiche, die Offenbarung aber von den gegenwärtigen Betrachtungen ausgeschlossen sei [124]).

Bei dieser Gelegenheit tritt Taylor überhaupt dafür ein, sich um der Gewißheit willen in Zweifelsfällen lieber des Urteils zu enthalten und vernünftigen Schlüssen jedenfalls nie ein größeres Gewicht beizulegen, als die Natur der Prämissen, aus denen sie gezogen sind, es erlaubt. Besondere große Sorgfalt aber ist bei Religionsangelegenheiten erforderlich. Denn ein falscher Beweis in der Religion erweckt starken Verdacht gegen die ganze Sache. Man darf daher nicht glauben, die Grundlagen der Religion würden untergraben, wenn jemand aus reiner Wahrheitsliebe die Schwäche oder Unschlüssigkeit eines Beweises zu Gunsten der Religion aufzeigt. Falsche Beweise bringen ähnlich wie falsche Freunde ja doch eher Schaden als Nutzen. Es ist also vielmehr ein Dienst und nicht ein Unrecht an der Wahrheit, wenn man unsichere Schlüsse aufdeckt und entfernt.

Als Beispiel hierfür gibt Taylor zum Schluß noch eine Kritik des ontologischen Gottesbeweises. Da wir keine wahre Erkenntnis vom Wesen des Geistes besitzen, so ist klar, daß wir nicht imstande sind zu wissen, ob ein Geist notwendig existiert, ob sein Dasein a priori in seinem Wesen begründet ist, wie Taylor vorhin von Raum und Zeit behauptet hat. Es gibt aber Philosophen, die doch eine solche Notwendigkeit von Gott aus der Natur der Vollkommenheit beweisen zu können glauben. Sie schließen so: Gott ist unendlich, d. h. absolut vollkommen, also muß er notwendig existieren; denn notwendige Existenz ist eine der höchsten Vollkommenheiten. Nach Taylor dagegen ist dieser Beweis falsch und beruht auf dem Mißbrauch des Ausdruckes Vollkommenheit. Dies Wort drückt ein Verhältnis aus, nämlich die Übereinstimmung zwischen einem gewissen Zwecke und einer gewissen Kraft in dem Ding, das vollkommen genannt wird. Der Ausdruck stammt ursprünglich aus dem Gebiete der Kunstfertigkeit. Wenn ein Kunstfertiger ein Ding um einer gewissen Wirkung willen macht, so nennt man sein Werk, je nachdem es mit seiner Ab-

124) Vgl. den Anfang des Erstentwurfes nach Young (hier S. 57 und 98).

sicht übereinstimmt, mehr oder weniger vollkommen. Aus der Kunst ist der Ausdruck in die Sittenlehre übernommen worden; hier bedeutet er die Eigenschaft eines Handelnden, durch die er fähig ist, in Übereinstimmung mit seinem Strebensziele zu handeln. Die Metaphysiker haben diesen Ausdruck endlich auch in ihre transzendente Wissenschaft übertragen; sie gebrauchen ihn, um die Übereinstimmung eines Dinges mit seiner Idee zu bezeichnen. Daraus ergibt sich, daß die Vollkommenheit sich auf die Eigenschaften bezieht, die das Wesen eines Dinges ausmachen; vollkommen ist ein Ding, wenn es von den in seinem Wesen möglicherweise zu vereinigenden Eigenschaften die meisten, die besten und je das beste in seiner Art besitzt. Jedenfalls also hat die Vollkommenheit es mit dem Wesen und nicht mit dem Dasein der Dinge zu tun. Das Dasein ist keine Vollkommenheit und überhaupt keine Eigenschaft eines Dinges, sondern sein bloßes Bestehen in der Realität. Deshalb ist auch die notwendige Existenz, die nur eine besondere Art der Existenz ist, keine Vollkommenheit und überhaupt keine Eigenschaft eines Dinges.

Man könnte allerdings einwenden, die notwendige Existenz sei zwar nicht eine Vollkommenheit in sich selbst, aber doch in ihrer Ursache, auf Grund dessen, daß die Wesenseigenschaft, aus der sie herfließt, die vollkommenste und hervorragendste von allen ist, indem sie nur als existierend gedacht werden kann. Aber was für eine Vollkommenheit ist denn bei alle dem? Der Raum existiert notwendig auf Grund der Ausdehnung, die nur als existierend gedacht werden kann. Aber im Raum ist doch auf Grund dessen keine Vollkommenheit, da er überhaupt nicht wirkt und keine Kraft besitzt, worin, wie Taylor gezeigt hat, alle Vollkommenheit besteht. Die notwendige Existenz ist also für sich genommen keine Vollkommenheit; folglich schließt der Gedanke der unendlichen Vollkommenheit nicht den der notwendigen Existenz ein und kann unmöglich zum Beweise dienen, daß Gott notwendig existiert. Wenn dies doch der Fall ist, dann muß es auf solchen Eigenschaften seines Wesens beruhen, die wir nicht zu erkennen vermögen. —

So weit hat Taylor seine philosophischen Gedankengänge in der einzigen uns erhaltenen Abhandlung entwickelt. Es ist bedauerlich, daß uns von den anderen Entwürfen für sein geplantes größeres Werk nichts zugänglich ist, und daß seine Auseinandersetzungen mit der französischen Naturphilosophie in den Briefen an Montmort (s. im Anhang A, Nr. 2—4) anscheinend nicht erhalten sind. So viel aber läßt sich schon aus dem uns Vorliegenden sehen, daß Taylor nicht nur für Mathematik und Naturwissenschaft, sondern auch für philosophisches Denken großes Interesse und Verständnis besessen hat. Er verdankt zwar seine Grundanschauungen über die rationale Naturphilosophie und Theologie, ähnlich wie Newton, der Schultradition des sog. Cambridger Platonismus, z. B. die Lehre von der substantiellen Realität des Raumes und der Zeit[104]) und die vernünftige Begründung des Gottesglaubens auf die Unmöglichkeit der mechanischen Naturerklärung[123]). Aber er hat sich darüber hinaus auch mit der französischen und deutschen Philosophie seiner Zeit beschäftigt und,

obwohl er die Natur- und Gottesauffassung der Cartesianer und Leibnizens meist scharf kritisiert, doch wenigstens von Malebranche auch positiv gelernt, z. B. in der Geistesphilosophie [111]), [117]). Andrerseits hat er die Lehren von Henry More und Ralph Cudworth keineswegs kritiklos übernommen, sondern sich selbständig mit ihnen auseinandergesetzt. Mores Lehre von der Ausgedehntheit aller, auch der geistigen Substanzen, lehnt er ab [106]), ebenso Cudworths Übertreibung der göttlichen Allmacht (s. o. S. 69); und die weitverbreitete Lehre von den „plastischen Kräften", durch deren Vermittlung Gott teleologisch in der Natur wirken soll, läßt er dahingestellt [119]), [121]). Überhaupt wehrt er sich gegen eine zu weite Ausdehnung der rationalen Metaphysik (S. 62/3, 66, 67, 69/70) und empfiehlt die Einschränkung des reinen Denkens auf solche Gebiete, wo es zu fester Gewißheit zu führen vermag, während man sich im übrigen mit der Feststellung erfahrbarer Tatsachen begnügen soll [101]), [109]). Besonders interessant ist in dieser Hinsicht seine Kritik des ontologischen Gottesbeweises, die mit ihrer scharfen Unterscheidung des Daseins von den Wesenseigenschaften einen Kantischen Gedanken vorwegnimmt. Die originellste Lehre Taylors, auf die er selbst auch großes Gewicht legt, ist wohl seine Ersetzung der üblichen Zweiteilung der Geisteskräfte (Denken und Wollen) durch die Dreiteilung der Geistestätigkeit (Wahrnehmen, Fühlen, Handeln), die meist erst einer späteren Zeit zugeschrieben wird [112]). Nach alle dem dürfte Taylor auch in der Geschichte der Philosophie und nicht nur in der Mathematik und Physik eine ehrenvolle Erwähnung wohl verdienen.

Anhang A.

Aus Taylors wissenschaftlichem Briefwechsel.

a. Fundorte sämtlicher bisher gedruckten wiss. Briefe[125]).

1.) Taylor an Machin, 26. 7. 1712 (a. St.), Bibl. math. 3. Reihe, Bd. VII, S. 368/71.

2.) Montmort an Taylor, 2. (?) 9. 1715, Contemplatio phil. S. 81, hier S. 73 und S. 83.

3.) Montmort an Taylor, 2. 1. 1716, Contemplatio phil. S. 88, hier S. 73 und S. 84.

4.) Montmort an Taylor, 31. 3. 1716, Contemplatio phil. S. 84, hier S. 74 und S. 86.

5.) Montmort an Taylor, 12. 4. 1716, Contemplatio phil. S. 93, hier S. 76 und S. 87.

6.) Montmort an Taylor, 22. 1. 1717, Commerc. epist. Collins etc. éd. Biot et Lefort, Paris 1856, S. 248.

7.) Montmort an John Taylor, 28. 5. 1717, Contemplatio phil. S. 100, hier S. 76 und S. 89.

8.) Taylor an Keill, 17. 7. 1717 (a. St.), Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 235 (z. T.).

9.) Taylor an Halley, 21. 10. 1718 (a. St.), Contemplatio phil. S. 103, hier S. 77 und S. 90.

10.) Taylor an Rob. Smith, 27. 11. 1718 (a. St.), Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 231/2.

11.) Taylor an Rob. Smith, 11. 12. 1718 (a. St.), Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 233/5.

12.) Montmort an Taylor, 18. 12. 1718, Commerc. epist. Collins etc. éd. Biot et Lefort, Paris 1856, S. 248.

13.) Joh. Bernoulli an Montmort für Taylor, 26. 1. 1719, Contemplatio phil. S. 105, hier S. 77 und S. 90.

14.) Taylor an Montmort, 5. 2. 1719 (a. St.), Contemplatio phil. S. 109, hier S. 78 und S. 92.

---

[125]) Neun Briefe von und an Taylor sind in allgemein zugänglichen Veröffentlichungen erschienen: Nr. 1, 6, 8, 10—12, 15, 16 und 19. Weitere 23, von denen elf auch wissenschaftliches Interesse haben, sind nur in dem kaum bekanntgewordenen Privatdruck von Taylors Contemplatio philosophica, London 1793, enthalten. Da dieser Privatdruck in keiner deutschen Bibliothek vorhanden und auch in England selten ist, lasse ich einen Wiederabdruck der elf wissenschaftlichen Briefe auf Grund des Exemplars der Universitätsbibliothek Manchester (mit Inhaltsangabe und Anmerkungen) folgen.

15.) Taylor an Keill, 26. 4. 1719 (a. St.), Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 235/6 (z. T.).

16.) Taylor an Jones, 5. 5. 1719 (a. St.) Corresp. of scientific men of the 17 th century, Oxford 1841, Vol. I, S. 278.

17.) Taylor an Keill, 7. 5. 1720 (a. St.), Contemplatio phil. S. 118, hier S. 80 und S. 95.

18.) Conti an Taylor, 22. 5. 1721, Contemplatio phil. S. 121, hier S. 81 und S. 95.

19.) Taylor an Keill, 26. 8. 1721 (a. St.), Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 236 (z. T.).

20.) Conti (?) an Taylor, 15. 1. 1724, Contemplatio phil. S. 139, hier S. 82 und S. 97.
Einige Bruchstücke aus dem Briefwechsel mit Montmort sind schon zu Taylors Lebzeiten gedruckt worden, s. Anm. 153.

b. Inhaltsangabe der 1793 veröffentlichten wiss. Briefe[125]).

2.) Pierre Rémond de Montmort an Brook Taylor, 2. (?) Sept.[125a]) 1715.
Montmort hat von Nicolle[126]) erfahren, daß Taylor diesem am 18. Juli 2 Exemplare seines Buches[127]) zur Verteilung gesandt hat; ferner daß Taylor an ihn selbst (Montmort) einen Brief mit Einwürfen gegen die Physik des Descartes und Malebranche geschrieben hat. Montmort hat aber seit Taylors Abreise von Paris nur einen Brief ohne wissenschaftlichen Inhalt erhalten und fürchtet, daß der andere verloren gegangen ist. Dann spricht er vom Tode des französischen Königs und der politischen Lage in Frankreich, endlich von der Krankheit Malebranches, der kaum den Sommer überleben werde.

3.) Montmort an Taylor, 2. Januar 1716[127a]).
Montmort entschuldigt sich, daß er auf die ihm von Taylor vorgelegten philosophischen Probleme noch nicht antworten könne; er sei durch Besuch völlig in Anspruch genommen. Er spricht dann von einem Buch des Herrn „Hermant“[128]), das dieser ihm gesandt habe, und das sehr gelehrt sei. Er berichtet auch von dem Besuche Nicolles[126]), ferner von Bossuets Beziehungen

---

125a) In der Ausg. 1793 steht auf S. 81: 2. Sept., dagegen auf S. 83: 6. Sept.

126) Nicht der bekannte Cartesianer Pierre Nicole, sondern der Mathematiker François Nicole (1683—1758), ein Schüler Montmorts.

127) Gemeint ist Taylors Methodus incrementorum, London 1715.

127a) In der Ausgabe 1793 ist dieser Brief datiert: January 2, 1715. Aus der Erwähnung der erst Mitte oder Ende 1715 erschienenen Schriften von Taylor und Hermann (s. Anm. 127 und 128) folgt aber, daß es 1716 heißen muß. Vielleicht ist die Zahl 1715 im Sinne der damaligen englischen Chronologie zu verstehen, die das neue Jahr erst am 25. März beginnen ließ.

128) Gemeint ist wohl Jakob Hermann (1678—1733), Phoronomia seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo, Amstelodami 1716. Das Buch ist in Wirklichkeit schon 1715 herausgekommen; Leibniz erhielt es vom Verfasser im September 1715 (Math. Schr. Bd. IV, S. 397/8), seine Rezension erschien in der Januar-Nummer 1716 der Acta erud. Lips.

zum Regenten von Frankreich. Er läßt Newton, Halley, Burnet, Gravesande, de Moivre und Sloane grüßen und bittet um politische Neuigkeiten aus England und Schottland, einerlei ob vom Tory- oder Whig-Standpunkte. Endlich teilt er mit, daß er ein Exemplar von Taylors schönem Buch[127]) an Bernoulli geschickt habe.

In einer Nachschrift vom gleichen Datum bestätigt Montmort den Eingang eines Briefes Taylors vom 6. Dezember des vorigen Jahres. Er freut sich daraus zu sehen, daß die von ihm mitgeteilten Summen von Taylor auch gefunden seien, und bittet um Angabe seiner Summationsmethode. Er weist auf einen Schreibfehler hin, der ihm bei der Reihe $+\frac{1}{123}+\frac{2}{345}+\frac{3}{567}+$ usw. $=\frac{1}{4}$[129]) unterlaufen sei: das erste Glied dürfe, wie schon die Analogie zeige, nicht $\frac{1}{13}$ heißen. Das Blatt, das Taylor geschickt hat[130]), will Montmort allen Personen mitteilen, die Taylors ausgezeichnetes Buch besitzen. Er empfiehlt de Moivre, seine neue Ausgabe[131]) lieber in lateinischer als in englischer Sprache abzufassen; denn so ausgezeichnete Bücher müßten bei allen Völkern verbreitet werden. Er bittet nochmals um Neuigkeiten und verspricht seinerseits alle wissenschaftlichen Neuigkeiten, die er erfahren könne, zu berichten.

4.) Montmort an Taylor, 31. März 1716.

Nach einer Vorbemerkung über den geeigneten Ein- und Ausfuhrort für die beabsichtigten Zider- und Weinsendungen bittet Montmort, zur Vervollständigung der in seinem Buche[132]) auf Seite 394 enthaltenen Tabelle der männlichen und weiblichen

---

[129]) Gemeint ist die Reihe $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 6\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 8\cdot 9}+\cdots$, die in der Tat bei wachsender Gliederzahl dem Werte $\frac{1}{4}$ zustrebt. Denn:

$$s_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\nu}{(2\nu-1)\,(2\nu)\,(2\nu+1)}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu+1}\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]\longrightarrow\frac{1}{4}\ \text{für}\ n\longrightarrow\infty$$

[130]) Vermutlich handelt es sich um die „Corrigenda et Addenda", die später auch der zweiten Auflage der Methodus incrementorum, 1717, am Schlusse beigegeben sind.

[131]) Abraham de Moivres Abhandlung: De mensura sortis, Philos. Transactions 1711, erschien erweitert als Buch unter dem Titel: The doctrine of chances, London 1718.

[132]) Essay d'analyse sur les jeux de hazard, 2. éd. 1713 (zuerst 1708).

Geburten in London von 1629—1710, um die Fortsetzung bis 1715, ferner um die Zahl der Todesfälle in möglichst vielen Jahren. Außerdem bittet er noch um eine genaue wissenschaftliche Beschreibung der schönen Naturerscheinung, die in London während der Nacht vom 17. auf den 18. März 1716 (neuen Stils) stattgefunden habe, damit er darüber in der Akademie berichten könne[133]). Montmort bestellt Empfehlungen von Herrn de Waldegrave und bittet Taylor, Herrn Halley für seinen Gruß im Briefe an de Fontenelle zu danken. Ferner teilt er mit, daß sich die Mehrzahl der Mitglieder der Akademie gegen den Druck der Abhandlung Keills[134]) in den Denkschriften der Akademie ausgesprochen habe, weil dies, da Keill der Akademie fremd sei, gegen die Statuten verstoße. Er selbst habe sich für Keill eingesetzt mit der Begründung, daß a) die Abhandlung ausgezeichnet sei, b) Newton vorher von Nik. Bernoulli in den Denkschriften angegriffen worden sei[135]), obwohl der ebensowenig wie Keill Mitglied der Akademie sei, c) eine Ausnahme mindestens zu Gunsten eines so bedeutenden Mannes wie Newton oder des Herrn Halley im Namen der Royal Society zulässig sei. Montmort entschuldigt sich, daß er noch immer nicht auf Taylors Einwürfe gegen die französische Naturphilosophie[136]) geantwortet habe. Aber das müsse sorgfältig überlegt werden, denn ihre Ansichten über die Physik wichen noch stärker von einander ab, als die zersplitterten Lehren der Theologen; obwohl man in der Philosophie etwas klarer sehe als in der Religion, sei eine „Reunion" ihrer Standpunkte doch ebenso schwierig, da sie toto coelo verschieden seien.

Zum Schluß erwähnt Montmort noch eine Verwundung des Regenten von Frankreich und einen sehr interessanten Brief, den Leibniz an ihren gemeinsamen Bekannten Conti gesandt habe[137]).

---

[133]) Siehe Histoire de l'Acad. Royale, 1716, S. 7: „Sur une lumière septentrionale".

[134]) John Keill hatte eine Apologie Newtons gegen Joh. und Nik. Bernoulli (s. folg. Anm.) geschrieben, und Halley hatte Fontenelle gebeten, sie in den Denkschriften der Pariser Akademie abzudrucken (s. Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 187). Die Apologie erschien dann im Journal Litéraire, Haag 1716. Über die Fortsetzung des Streites s. Anm. 153.

[135]) Nikolaus (I.) Bernoulli hatte einem Aufsatze seines Oheims Joh. Bernoulli über „les forces centrales dans les milieux resistans" in den Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1711, S. 47 ff., eine „addition" beigefügt, in der behauptet wurde, Newton habe wiederholt ein falsches Verfahren bei der Ableitung der 2. und höheren Differentiale angewandt (wiedergedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, tom I, S. 502 ff., addition S. 509/10); vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², 1901, S. 316 und 283/5, mit Eneströms Berichtigungen, Bibl. math., 3. Folge, Bd. XI, 1910/1, S. 262/5 und 257/8, ferner hier S. 50.

[136]) Gemeint sind die brieflichen Einwürfe Taylors gegen Descartes und Malebranche, die schon im Briefe Montmorts vom 2. September 1715 (o. S. 73) erwähnt werden, aber als noch nicht bei ihm angekommen. Auch mit den „philosophischen Problemen" im Briefe Montmorts vom 2. Januar 1716 (o. S. 73) ist jedenfalls dasselbe gemeint.

[137]) Antonio Schinella, genannt Abbé Conti, kam mit Montmort 1715 nach London und vermittelte einen Briefwechsel zwischen Newton und Leibniz. Leibnizens Brief an ihn vom 6. Dezember 1715 s. Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern, hrsg. von C. I. Gerhardt, Berlin 1899, S. 262/7. Vgl. den hier auf S. 95/6 abgedruckten Brief Contis an Taylor vom 22. Mai 1721.

In einer Nachschrift bestellt er Empfehlungen an Fräulein Plancy, die sehr gut zu begleiten anfange, und droht de Moivre mit dem Verlust seiner Freundschaft, wenn er nicht bald von sich hören lasse.

5.) Montmort an Taylor, 12. April 1716.

Nach einleitenden Bemerkungen über die schon erwähnte Weinsendung und vielen Ausdrücken seiner großen Verehrung für Fräulein Barton, Newtons Nichte, teilt Montmort mit, daß er in einem Briefe den deutschen Mathematikern Taylors Problem vorgeschlagen habe, nämlich eine Kurve zu finden, die andere unter rechten Winkeln schneide, und zwar solche, die durch die Gleichung zz ddx = 2 x dz² ausgedrückt würden [138]). Er fügt hinzu, auch Nicolle [126]) solle an diesem Problem arbeiten, und er selbst habe seine früheren Gedanken über die Trajektorien wieder hervorgeholt; bei einer kleinen Abänderung des Leibnizschen Trajektorienproblems werde es außerordentlich schwierig, da man x und y in der Differentialgleichung 2xy dx = ax dy — 2yy dy nicht trennen könne. Montmort fügt für Taylor noch ein kleines Problem bei, das er selbst mit Hilfe einer Reihe Taylors gelöst habe. Schließlich beklagt er sich, daß de Moivre ihm seit seinem Besuch in England erst zweimal geschrieben habe, und bittet Taylor, diskret festzustellen, was Moivre mit den Theoremen anfange, die er ihm vor zwei Jahren mitgeteilt habe. Wenn Moivre sie in seinem Buche unter Montmorts Namen verwende, so müßten daran noch die kleinen, Taylor mitgeteilten, Berichtigungen angebracht werden. Wahrscheinlich aber würden sie sich in seinem Buche auf seine Weise abgeändert finden. Moivre habe ja auch in der Abhandlung „De mensura sortis“ [131]), sein (Montmorts) Buch [132]) geplündert, ohne seinen Namen zu nennen; aber er nehme ihm das nicht weiter übel.

7.) Montmort an John Taylor, 28. Mai 1717.

Montmort kündigt dem Vater Taylor die von seinem Sohn für ihn erbetene Weinsendung an. Er schickt seinem Sohn die Lobschrift auf Leibniz [139]) und seinen Töchtern einen Band neuer Stücke von Clavecin. Er rühmt Taylor, den Sohn, als großen Gelehrten, der seinem ganzen Volke Ehre mache, bedauert aber

---

[138]) Im Druck 1793 lautet die linke Seite *zz ddse.* Darin ist aber se zweifellos eine falsche Lesung des handschriftlichen x. Taylors Problem ist die Entgegnung auf die Trajektorienprobleme, die Leibniz auf Rat Joh. Bernoullis den Engländern vorgelegt hatte und diese wider Erwarten zu lösen vermochten (vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², S. 462/4, 465/6, 468/9). Joh. Bernoulli löste aber auch Taylors Problem sofort und ebenso sein Neffe Nikolaus (I.) Bernoulli, wie sie in ihren Briefen an Leibniz vom 20. Mai und 24. Oktober 1716 berichten (Leibniz, Math. Schr. hrsg. von C. I. Gerhardt, Bd. III, Halle 1855, S. 961 und 993). Joh. Bernoulli gibt den Wortlaut des Problems so an: „Determinari trajectorias normaliter secantes curvas, quibus respondet haec aequatio zz ddx = 2x dz², in qua supponitur dz constans; et definire naturam harum curvarum, quibus ista aequatio respondet“.

[139]) Von Fontenelle in der Académie Royale des Sciences in Paris 1717 gelesen und in der Histoire de l'Académie gedruckt.

seine schlechte Gesundheit und läd ihn, wenn die Bäder in Aachen und Spa nicht helfen sollten, für mehrere Monate zu sich nach Montmort ein.

9.) Taylor an Halley, 21. Oktober 1718 (a. St.).

Taylor teilt mit, daß er erst drei Wochen nach der Eröffnung der Sitzungen der Royal Society in London eintreffen könne; überhaupt könne er in Zukunft nicht lange genug in London sein, um die Geschäfte der Royal Society vollständig und pünktlich genug zu führen. Deshalb bittet er einen anderen zum Sekretär zu bestimmen. Nach Unterzeichnung des Briefes fügt er hinzu: Die folgende Zeile werde er erklären, wenn er Halley persönlich treffe. $r^n - 1 + 4nr^2 + vr^2$ [140]).

13.) Auszug aus einem Briefe von Joh. Bernoulli an Montmort für Taylor, 26. Januar 1719 [141]).

In diesem Brief bezeichnet Bernoulli Taylor als einen geistreichen Mann und läßt ihm seine Freundschaft anbieten, falls er sie anzunehmen geruhe. Taylor müsse dann aber künftighin solche mißachtende Ausdrücke über die Nichtengländer vermeiden, wie er sie am Anfang seiner Lösung des Trajektorienproblems in den Transactions [142]) gebraucht habe. Er wolle gern mit Taylor über mathematische Angelegenheiten in Diskussion treten, jedoch nur in friedfertiger Weise. Betreffs der Reduktion der Größen

$$\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}\eta - 1}\,dz}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ und } \frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}\eta - 1}\,dz}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta}}$$ [143]),

die Taylor den Geometern Europas aufgebe, erfordere die Gerechtigkeit, daß er (Bernoulli) ebensowohl wie Newton davon entbunden werde, denn niemand habe soviel wie er über solche

[140]) Vgl. Joh. Bernoulli, Responsio ad nonneminis (d. i. John Keills) provocationem, Acta erud., Lips., Mai 1719, = Opera omnia, 1742, tom II, S. 393—402. Dort auf S. 399 lautet die Formel aber etwas anders: $(r^4 - 1 + 4nrr + 4ur^2)$. S. ferner hier S. 79 mit Anm. 147.

[141]) In der Ausgabe 1793 ist der Brief Juli 1719 datiert. Das widerspricht aber der Angabe dort auf S. 109, daß Taylor die Auszüge aus Bernoullis Brief am 4. Februar (a. St.) erhalten habe. Das richtige Datum findet sich in dem Aufsatz: Clar. Taylori Mathematici Angli Problema Analyticum, quod omnibus Geometris non-Anglis proposuit, solutum a Joh. Bernoulli, Acta erud., Lips., Juni 1719, S. 256—270 = Opera omnia, 1742, tom II, S. 402—418, wo auf S. 404—406 ein Stück unseres Briefes Nr. 13 in lateinischer Sprache wiedergeheben ist.

[142]) Gemeint ist das Vorwort zu der Abhandlung No. 354 d. Phil. Trans., London 1717, S. 695—701. Diese behandelt das Leibnizsche Trajektorienproblem und hat folgenden Titel: „Solutio problematis a Dom. G. G. Leibnitio geometris Anglis nuper propositi per Brook Taylor". Sie ist wieder abgedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, tom. II, S. 281/5.

[143]) Nach dem in Anm. 141 genannten Aufsatz verlangt das Problem Taylors, das Joh. Bernoulli durch Montmort mitgeteilt worden ist, die Zurückführung der Integration der im Text genannten Ausdrücke auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel, wenn e, f, g Konstanten, δ eine positive oder negative ganze Zahl und λ eine Zahl der Reihe 2, 4, 8, 16, 32 usw. ist. Statt η steht im Druck bei Bernoulli q.

Reduktionen gearbeitet. Wenn Montmort seine Aufsätze über die Intregration rationaler Brüche von 1702 und 1703 [144]) zur Hand nehme, so werde er zugeben müssen, daß Taylor sich sehr wahrscheinlich nur derselben Methode bediene, die er (Bernoulli) entdeckt habe. Was Taylor hinzugefügt habe, sei höchstens eine Modifikation dieser Methode zur Vermeidung imaginärer Wurzeln. Aber eine solche Modifikation könne er (Bernoulli) ebenso gut finden. Zum Beweise dessen schlägt Bernoulli Taylor eine Wette vor; jeder solle an Montmort als Schiedsrichter 50 Guineen zahlen, dann wolle er (Bernoulli) seine Lösung jener Aufgabe an diesen schicken; wenn sie richtig sei, erhalte er alle 100 Guineen, wenn sie aber falsch sei oder nicht zur bestimmten Zeit eintreffe, so erhalte Taylor alles. Umgekehrt verpflichte er sich auch, unter gleichen Bedingungen Taylor eine Aufgabe zu stellen. Wenn Taylor auf diesen Vorschlag nicht eingehe, werde er sich nach dem Vorbilde Newtons in Schweigen hüllen und künftighin den Problemen der Engländer keine Beachtung schenken.

14.) Taylor an Montmort, 5. Februar 1719 (a. St.).

Taylor dankt ironisch für Bernoullis gnädiges Freundschaftsangebot; dies Angebot sei jetzt eigentlich nicht mehr recht am Platze, nachdem Bernoulli ihn in der „Epistola pro eminente mathematico" des Plagiats beschuldigt und in seiner letzten Abhandlung über die Isoperimeter wieder so rücksichtslos behandelt habe [145]). Taylors scharfe Äußerung in der Vorrede seines Trajektorienaufsatzes [142]) erkläre sich aus seinem Unwillen über das Verhalten Bernoullis und der anderen, die sich mit der ganzen englischen Nation herumzankten, bloß wegen des Streites zweier Privatpersonen, Newton und Leibniz, und die sich törichterweise einbildeten, den Streit durch die Herausforderung völlig unbeteiligter Personen beendigen zu können. Auf diese Herausforderung habe er, Taylor, um der Ehre seines Vaterlandes willen antworten müssen. Aber er habe nicht etwa wie jene die ganze fremde Nation angegriffen, sondern absichtlich nicht von Deutschen im allgemeinen gesprochen, sondern nur von Joh. Bernoulli im besonderen, obgleich vermutlich sein Sohn und Neffe mitbeteiligt seien. Joh. Bernoulli sei ja, wie durch das Geständnis seines Sohnes jetzt feststehe, der Verfasser der „Epistola pro eminente mathematico", und habe wahrscheinlich auch die unbillige Besprechung der „Methodus incrementorum" in

---

144) Mém. de l'Acad. Royale, Paris 1702, S. 281: „Solution d'un problême concernant le calcul integral"; ein Auszug daraus in den Acta erud., Lips., 1703, S. 26: „Problema exhibitum"; wiedergedruckt in Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742 tom. I, S. 392—400; vgl. Cantor, Vorl., Bd. III², 1901, S. 272/5 (Partialbruchzerlegung).

145) „Epistola pro eminente Mathematico" (anonym), Acta erud., Lips., 1716, S. 296/315. „De solutionibus quae extant problematum isoperimetricorum", ebenda 1718, S. 15 ff., insbesondere S. 18. Vgl. oben S. 20 und 21/2.

den Leipziger Acta eruditorum veranlaßt[146]). Die offenbare Ursache von alle dem sei der Groll, der durch den Streit mit Leibniz entstanden sei. Aber er, Taylor, sei an dieser Kontroverse völlig unbeteiligt und habe nie wie Keill darum gekämpft. Er wolle sich bald öffentlich gegen Bernoulli verteidigen. Aber mit seinen Herausforderungen wolle er nichts zu tun haben. Er habe nie gesagt, daß er Bernoulli für unfähig halte, das Problem Keills[147]) zu lösen, sondern nur Montmort mitgeteilt, daß er selbst es lösen könne. Er wolle gern glauben, daß Bernoullis Lösung besser und allgemeiner sei, und seine garnicht damit in Vergleich stellen, ja sie nicht einmal veröffentlichen, sondern höchstens Montmort privatim mitteilen. Hinsichtlich des anderen Problems über die Kurvenquadratur[148]) erklärt Taylor, es sei nicht sein eigenes, sondern stamme von Cotes; er selbst aber habe es, ohne Cotes Lösung zu kennen, in den angegebenen Fällen gelöst. Bernoulli und Leibniz dagegen hätten nichts Neues entdeckt, sondern nur viele Worte über einen Gedanken gemacht, von dem Newton schon in seinen Quadraturtafeln Gebrauch gemacht habe. In der 6. Form gebe er die Quadratur von

$$\frac{z^{\frac{1}{2}}\, y-1}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}$$ [149]).

Dagegen habe Leibniz das, was Cotes und Taylor darüber hinaus gegeben hätten, als unmöglich beweisen zu können behauptet, und auch Bernoulli scheine sich dabei zu beruhigen, wie man aus seinem Schweigen schließen müsse. Wenn er es aber besser wisse und inzwischen weitergekommen sei, dann könne er es

---

[146]) Die Besprechung der „Methodus incrementorum" in den Acta erud., Lips., 1716, S. 292—296, stammt in Wahrheit von Leibniz; s. oben S. 18 mit Anm. 29.

[147]) Das Keillsche Problem fragt nach der Wurfkurve unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Joh. Bernoulli erhielt es, wie er in dem oben in Anm. 140 zitierten Aufsatze sagt, im Februar 1718 durch einen befreundeten Mathematiker (Montmort) und fand die Lösung bald. Vor ihrer Bekanntgabe forderte er aber, daß auch der Herausforderer seine Lösung dem Vermittler bis September 1718 einsende. Aber trotz Verlängerung des Termins bis November 1718 ging keine Lösung von Keill ein. Erst am 6. November (alten Stils) teilte Taylor mit, daß er eine Lösung gefunden habe, die er unter dem Zeichen ($r^4 - 1 + 4nrr + 4ur^2$) versteckte. (Vgl. die Nachschrift zum Brief Taylors an Halley vom 21. Oktober 1718 a. St.). Hierauf veröffentlichte Bernoulli den in Anm. 140 genannten Aufsatz und sandte seine Problemlösung am 13. Juli 1719 an Montmort. Ein Auszug aus diesem Briefe ist gedruckt in den Acta erud., Lips., Mai 1721 = Opera omnia, 1742, tom. II, S. 513/16.

[148]) Gemeint ist das im Brief Bernoullis an Montmort vom 26. Januar 1719 (s. S. 77 mit Anm. 143) genannte Reduktionsproblem, das Bernoulli und meist auch schon Leibniz durch Partialbruchzerlegung gelöst hatten.

[149]) Hier liegt ein Schreib- oder Druckfehler vor. Nach Newtons „Quadratura curvarum" muß es heißen:

$$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta - 1}}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}$$

jetzt ja zeigen, ehe die bisher noch ungedruckte Lösung von Cotes veröffentlicht sei[150]).

Im letzteren Abschnitt des langen Briefes verspottet Taylor Bernoullis übermäßige Eitelkeit, die ihn sich einbilden lasse, er sei der einzige Lehrer der ganzen Welt — nicht nur Taylors, sondern sogar Newtons selbst, der von ihm erst die zweiten und höheren Fluxionen gelernt haben solle[135]). Taylor fragt höhnisch, ob denn auch sein Held Leibniz, sein Bruder Jakob und die tüchtigen französischen Mathematiker, de l'Hospital, Varignon, de la Hire, de Lagny usw. alles nur ihm verdankten. Wenn man aber z. B. seine letzte Abhandlung über Isoperimeter[151]) genau ansehe, mit der alle anderen Leistungen, insbesondere die seines Bruders Jakob und Taylors, sich angeblich nicht messen könnten, so stelle sich heraus, daß er nicht etwa die Fehler seiner eigenen ersten Versuche[152]) hier berichtigt habe, sondern eine ganz andere Lösungsmethode benutze, nämlich — die seines Bruders, nur in eine kürzere und elegantere Form gebracht; und das Hilfsmittel zur Vermeidung der 3. Differenzen, dessen er sich so rühme, sei genau dasselbe, das in der Methodus incrementorum, S. 113, Z. 2 und 3 von unten, und sonst angewandt werde. Das sei der wahre Grund, weshalb Bernoulli dies Buch so verdamme und der Unverständlichkeit bezichtige: damit niemand es lese und den Diebstahl bemerke. Montmort möge Bernoulli dies ruhig alles mitteilen und dazu noch, daß er (Taylor) sich fortan nicht mehr um Bernoulli und seine Schreibereien kümmern werde.

17.) Taylor an Keill[153]), 7. Mai 1720 (a. St.).

Taylor billigt den Vorschlag wegen des Vorgehens gegen

---

[150]) Das hat Bernoulli auch getan, s. Anm. 141. Über das Versehen Leibnizens, das Taylor moniert und Bernoulli berichtigt hat, vgl. Cantor, Vorl. Bd. III², 1901, S. 273 und 275. Die Problemlösung von Cotes ist erst in der Ausgabe seiner „Harmonia Mensurarum" von Rob. Smith, Canterb. 1722, gedruckt.

[151]) „Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problemes sur les isoperimetres; avec une nouvelle méthode courte et facile de les resoudre sans calcul", Mém. d. l'Acad. Royale Paris 1718. S. 100, = Opera omnia, 1742, tom. II, S. 235.

[152]) „Solution du probleme proposé par M. Jaques Bernoulli dans les Actes de Leipsic du mois de May de l'Année 1697; trouvée en deux manieres par M. Jean Bernoulli son Frere, et communiquée à M. Leibnitz au mois de Juin 1698", Mém. Paris 1706, S. 236 = Opera I, S. 424.

[153]) John Keill stand zugleich mit Taylor im Kampf gegen Joh. Bernoulli (s. oben Anm. 135 und 134). Wegen seiner Apologie Newtons war Keill im Auftrage der Bernoullis von J. H. Crusius in den Acta erud., Lips., Oktober 1718, S. 454—66, und bald darauf wegen des in Anmerkung 147 erwähnten Problemes noch einmal von Joh. Bernoulli selbst (s. Anm. 140) schwer angegriffen worden. Zur Verteidigung gab Keill eine „Epistola ad Joh. Bernoulli", London 1720 heraus und fügte als Additamentum u. a. verletzende Auszüge aus Briefen Montmorts an Taylor bei. Dies sind wahrscheinlich die „Extracts", von denen Taylor hier spricht. Joh. Bernoulli rächte sich, indem er durch Burchard (s. Anm. 167) ebenso verletzende Auszüge aus Briefen Montmorts an die Bernoullis veröffentlichen ließ, ferner auch aus Briefen Taylors an Montmort, in denen es z. B. heißt: „Mr. Keill is better qualified for a Champion than for an Analyst" (s. Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, tom. II, S. 493 ff. und 512; vgl. auch Edleston, Corresp. of Newton and Cotes, London 1850, S. 187/8 und 236).

Bernoulli. Die übersandten Auszüge können gedruckt werden; auch Montmorts Brief, mit dem die Gegner drohen; denn nach Newtons Mitteilung ist dieser Brief bereits veröffentlicht. Jones ist in Besitz von Taylors Schrift, in der die Möglichkeit der Quadratur aller Kurven bewiesen ist, deren Ordinaten durch einen rationalen Bruch wie $\frac{a + bx^{\eta} + cx^{2\eta} + \text{etc.}}{A + Bx^{\eta} + Cx^{2\eta} + \text{etc.}}$ ausgedrückt sind, und soll dem Empfänger des Briefes eine Abschrift davon geben. Taylor kritisiert sodann die Lösung seines Problems durch Bernoulli[154]); dessen erste sieben Sätze, auf die er solchen Wert lege, seien lediglich Spezialfälle von Newtons Quadraturen, und der achte sei einer von Newtons ersten Sätzen, durch die Quadraturen erweitert. Dies zeige, wie wenig Bernoulli davon verstehe.

18.) Conti an Taylor, 22. Mai 1721[155]).

Conti berichtet Taylor, wie er in den Streit zwischen Newton und Leibniz hineingeraten sei. Auf Newtons Bitte versammelte Conti die fremden Gesandten und Minister in der Royal Society, um dort der Kollationierung der (gedruckten) Briefe Leibnizens mit den Originalen beizuwohnen[156]). Bei dieser Gelegenheit erklärte der Baron von Kirmannsegger[157]), die Kollationierung genüge nicht, sondern Newton müsse selbst an Leibniz schreiben, seine Gründe auseinandersetzen und von ihm eine direkte Antwort verlangen. Alle Minister stimmten zu, und später am Abend auch der König. Conti teilte dies Newton mit und erhielt von ihm nach 5 oder 6 Tagen einen Brief, aber nicht an Leibniz selbst, sondern an Conti adressiert[158]). Dieser mußte also bei der Weitersendung nach Hannover einen eigenen Brief beilegen und wurde so mit in den Streit verwickelt. Conti las seinen Brief Newton vor und ließ ihn von de Moivre verbessern; letzterer machte auch einen Zusatz über die Aequivokation in

---

154) Vgl. den Brief Bernoullis v. 26. 1. 1719 o. S. 77 mit Anm. 143 und 141.

155) Dieser Brief Contis über seine Vermittlertätigkeit zwischen Newton und Leibniz berichtigt in einigen Punkten die Darstellung Cantors (Vorl. Bd. III², 1901, S. 321). Conti verschweigt allerdings, daß er schon vor seinen Besuchen bei Newton mit Leibniz korrespondiert hat. Es handelt sich aber, gegen Cantors Vermutung, nur um einen Brief, unmittelbar vor Contis Abreise aus Paris nach London, und der Prioritätsstreit wird nicht darin berührt (gedruckt im Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern, Berlin 1899, S. 258/262). Erst Leibniz kam in der Nachschrift zu seiner Antwort an Conti vom 6. Dezember 1715 darauf zu sprechen (ebenda S. 262/7, zitiert im Briefe Montmorts an Taylor vom 31. März 1716 (hier S. 87 u. 75 m. Anm. 137). Diese Nachschrift gab den Anlaß zur Versammlung der Minister in der Royal Society und den folgenden Ereignissen, über die Conti hier einiges sonst Unbekannte erzählt.

156) Leibniz hatte in der Nachschrift des Briefes an Conti (S. 264 der in Anm. 155 zitierten Ausgabe) behauptet, seine Briefe seien in Commercium epistolicum Collins, London 1712, von seinen englischen Gegnern unvollständig veröffentlicht worden.

157) Vielmehr Kilmannsegg.

158) Newtons Brief an Conti ist datiert 26. Februar 1715/6 (a. St.), gedruckt im Briefwechsel 1899, S. 271/4.

dem von Leibniz gestellten Problem[159]). Newtons Brief blieb noch über einen Monat in London, ehe er durch den Baron de Discau nach Hannover gebracht wurde. Der König las ihn und erklärte ihn für überzeugend und schwer zu widerlegen. Die Gräfin Kirmannsegger[157]) ließ ihn durch Coste ins Französische übersetzen.

Leibniz war über Contis Brief erzürnt, wie seine Antwort[160]) und sein Brief an die Prinzessin von Wales[161]) zeigt. Er schrieb mehrere Rechtfertigungsbriefe, die Conti an Newton übergab. Dieser schrieb eine Art Antwort, die mit den früheren Briefen in der Geschichte der Fluxionen[162]) gedruckt wurde. Als des Mezeaux[163]) Leibniz einen neuen Druck in Holland vorschlug, war dieser einverstanden und versprach ihm auch einen neuen Beitrag.

Von dem später Geschehenen erklärt Conti wegen seiner Abreise aus England nichts zu wissen. Er habe aber gehört, daß Newton ihm Vorwürfe mache, weil er ihn in den Streit mit Leibniz verwickelt habe. Aber das eben Berichtete zeige doch das Gegenteil. Er habe sogar die Vorwürfe der Deutschen und Leibnizens selbst auf sich genommen, um Newtons Sache zu unterstützen, und vertrete sie auch in Frankreich, wo man gar nicht so sehr auf Newtons Seite stehe und die Gründe des Commercium epistolicum nicht für schlüssig halte. Es sei ihm unverständlich, weshalb man ihn jetzt mit Newton verfeinden wolle und ihm vorwerfe, er habe sich um seines eigenen Ruhmes willen in den Streit gemischt. Wenn diese Vorwürfe wiederholt würden, so werde er die wirkliche Geschichte veröffentlichen müssen[164]).

20.) Conti (?) an Taylor, 15. Januar 1724[165]).

Conti läßt Taylor eine astronomische Rechnung über den Durchgang des Merkur von de l'Ysle zur Übermittlung an Halais[166]) zugehen, da er selbst mit diesem nicht in Briefwechsel

---

159) Leibniz hatte in der erwähnten Nachschrift an Conti den Engländern ein Trajektorienproblem gestellt (vgl. Anm. 138). Moivres Kritik der Problemstellung s. im Abdruck des Briefes von Conti an Leibniz, Briefwechsel 1899, S. 270, Zeile 10—16.

160) Vom 9. April 1716, Briefwechsel 1899, S. 274.

161) Karoline, Gattin des englischen Thronfolgers Georg (II.).

162) Raphson, History of Fluxions, London 1715. Dazu hat Newton nach Leibnizens Tod einen Appendix (1716/7) herausgegeben, der mehrere Leibnizbriefe und Newtons Antworten enthält; wiedergedruckt im Briefwechsel 1899; diese Antwort Newtons S. 285—294.

163) Vielmehr des Maizeaux, Herausgeber des Recueil de diverses pieces . . . par Leibniz, Clarke, Newton etc. Amsterdam 1720, 2. 1740. Für diese Ausgabe hat des Maizeaux von Leibniz, Newton u. a. persönliche Berichtigungen und Zusätze erhalten.

164) Conti hat tatsächlich in einem Briefe an des Maizeaux vom 1. September 1721 Mitteilung davon gemacht und des Maizeaux hat seine Angabe in die 2. Auflage seines Recueil (s. vorhergehende Anm.), 1740, Preface, p. LXXXIII, aufgenommen.

165) Der Brief kann nicht, wie im Druck von 1793 steht, von Montmort stammen, der schon 1719 gestorben war. Aus dem Inhalt ergibt sich mit größter Wahrscheinlichkeit Conti als Verfasser.

166) Vielmehr Halley.

stehe. Er bedauert, daß Taylor ihn ganz vergessen habe und nicht mehr nach Frankreich komme. Er beglückwünscht ihn zu seiner zweiten Heirat. Dann spricht er von einem schweren Angriff auf Taylor in den Leipziger Acta eruditorum, in den auch er selbst (Conti) hineingezogen werde; es heiße da ungefähr folgendermaßen: Varignon habe einmal in Gegenwart Contis Taylor bewiesen, daß man den Kreis als Vieleck ansehen könne[167]). Es fehle aber viel, daß er den einen oder andern überzeugt habe. Er (Conti) glaube in einem Brief an Taylor davon gesprochen zu haben.

Conti hofft, daß Taylor an seinem Buche arbeite; das sei das Beste, was er gegen Bernoulli tun könne. Er wünscht ferner, von Taylor über methodische mathematische und physikalische Werke, die kürzlich in England veröffentlicht seien, Näheres zu erfahren. Auch Newtons Chronologie raisonnée werde von der ganzen Welt mit großer Spannug erwartet[168]). Zum Schluß übersendet Conti ein italienisches Sonett zur Weitergabe an Newton, der sich gewiß darüber freuen werde, daß seine Anziehungskraft hier als die L i e b e bezeichnet werde, die das System Descartes in Ordnung bringe.

c. Text der 1793 veröffentlichten wiss. Briefe[169]).

2. Montmort an Taylor, 2. (?) Sept.[125a]) 1715 (Ausgabe 1793, S. 81—83).

J'apprends, Monsieur, par une lettre de Mons. Nicolle[126]) qu'il en a reçu une de vous avec deux exemplaires de votre livre[127]) dont vous le chargez de faire la distribution, votre lettre est du 18 Juillet, et il me marque que vous m'en avez ecrit une, où il se trouve plusieurs objections contre la physique de Descartes, et du Pere Mallebranche. Je crains bien, Monsieur, qu' il n'étoit perdue, car je n'en ai reçu qu'une de vous depuis votre depart de Paris, et il n'y a aucune matière de science; ce seroit une vraie perte pour moi. Si par hazard je la reçois j'aurai l'honneur de vous en donner avis aussitôt, et

---

167) Gemeint ist Burchards „Epistola ad Taylor" in den Acta erud., Mai 1721, S. 195—228 = Joh. Bernoulli, Opera omnia, 1742, tom. II, S. 483 ff. Hier wird auf S. 504 gegen Taylors Kritik an Joh. Bernoullis Lösung des Isoperimeterproblems vom Jahre 1706 (s. Taylors Brief vom 5. Februar 1719, hier S. 94 mit Anm. 152) erwähnt, der von Taylor behauptete „Fehler" bestehe nur darin, daß Bernoulli eine Kurve als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachte; das aber täten doch auch Wolf, Hermann, Varignon, Manfredi, Riccati und der den Engländern günstige Abbé Conti; dieser und Varignon hätten Taylor, als er in Paris war, „ins Gesicht verurteilt" wegen seines Angriffes auf Bernoulli, und alle andern, außer Keill würden es auch tun.

168) Newton hat sein Buch „The chronology of ancient kingdoms amended" erst später zum Druck vorbereitet, nachdem Conti wider seinen Willen eine Table chronologique 1725 daraus veröffentlicht hatte. Das authentische Werk erschien erst nach Newtons Tod, 1728.

169) Der Abdruck erfolgt auf Grund der Ausgabe von 1793, aber unter Richtigstellung zahlreicher offenkundiger Druckfehler. Einige wichtigere Berichtigungen sind in den Anmerkungen besonders begründet.

j'y ferai reponse avec toute l'application dont je serai capable. Vous sçavez sans doutte la mort du roy: il expira dimanche à 8 heures $\frac{1}{2}$ du matin. Le jeune roy alla Jeudi au Parlement. Mr. le Duc d'Orleans sera regent du royaume pendant le minorité. Ce prince a infiniment de merite et beaucoup d'esprit. On espere un avenir meilleur que le passée. Mons. le Noailles a salué le jeune roy, Mr. le duc d'Orleans les princes et les princesses, et en a été très bien reçu. Le roy va à Vincennes pour toujours. On va travailler au Louvre, et on assure que la cour demeurera à Paris. On se flatte que les Jesuits seront un peu humiliés. En ce cas le *public* sera bien aise. Le bon Pere Mallebranche traine toujours, et il n'y a pas d'apparence qu'il passe l'automne. Que n'etes vous icy Mons. pour nous aider à manger touttes nos pêches et touttes nos prunes: on en regorge icy. Nous attendons compagnie de Paris. Sans la mort du roy elle seroit deja icy. Tous nos amis se portent bien et m'ont chargé de vous faire des complimens. Madame de Montmort surtout. Portez vous bien Monsieur et continuez de m'aimer puisque personne ne vous honore plus parfaittement que moy. J'ai deja l'honneur de vous ecrire. Apprenez moy si vous avez reçu ma lettre. Mon adresse est à Montmort par Epernai.

Remond de Montmort.

A Montmort ce 6 7bre, 1715.

13. Montmort an Taylor, 2. Januar 1716[127a]) (Ausg. 1793, S. 88—93).

Il y a un temps infini que je n'ai reçu de vos nouvelles, Monsieur, je ne puis vous exprimer à quel point je m'en ennuye. Vous avez du recevoir deux lettres de moy que j' eus l'honneur de vous ecrire au commencement du mois passé. Je ne suis point encore en etat de vous repondre à touttes les difficultés philosophiques que vous m'avez proposé, vous en trouverez la raison, et peut-être mon excuse dans le compte que je vais vous rendre de ma conduite et de mes occupations. Deux jolies personnes dont la plus agée a 21 ans, toutes deux vives, fringantes, folatres, spirituelles, belles surtout, sont icy depuis deux mois et doivent rester avec Mad[me] de Montmort tout le temps qu'elle a du demeurer icy. C'est à dire tout le mois de Janvier. Elles m'ont tellement occupé le coeur et l'esprit qu' il m'a ete impossible de penser à autres choses qu' à leurs charmes. Lorsque je veux prendre un livre elles me l'arrachent des mains. Je n'espere pouvoir penser et travailler que lorsque j'aurai le malheur de les perdre. Ce sera dans quelques jours. Je compte de rester encore un mois à Montmort. Je tacherai de mettre ce temps à profit pour vous dire un peu au long ce que je pense sur les matieres dont vous avez bien voulu remplir vos lettres. En attendant

Monsieur j'ai voulu me donner le plaisir de m' entretenir par lettres avec vous, et de vous renouveller au commencement de cette année les veux sincères que je fais pour votre bonheur depuis que j'ay l'honneur de vous connoitre. Je ne sçai point de nouvelles de sciences. Je m'en instruirai quand je serai à Paris, et je vous en manderai. Vous avez apparemment le livre de Mr. Hermant [128]) qu'il m'a envoyé. Il m'a paru que c'est un ouvrage tres sçavant. Je n'ay fait que jetter les yeux dessus et le parcourir forte à la hâste. M. Nicolle [126]) a été icy 3 semaines, et avoit bien voulu y rester plus longtemps car il etoit fort touché pour Mad^elle^ Kinot que vous connoissez, mais la rentrée de son academie e rapelloit. Mr. l'Abbé Bossuet est tres bien auprès Mons. le Regent, et fait assiduement sa cour. Mad^me^ de Montmort vous fait mille complimens. Faittes bien les miens s'il vous plait à Mr. Newton, Halley, et aussy à Mess. Burnet et Gravesande si vous les connoissez. Bien des reproches s'il vous plait à mon bon ami Mons. Moivre de ce qu'il m'oublie et ne m'ecrit point comme il me l'avoit promis. J'ose aussi vous prier de parler de moy à Mr. Sloane que j'honore tres parfaittement. Ne pourriez vous point nous mander un peu des nouvelles de l'etat present d'Angleterre et d'Ecosse? Parlez en *toris*, ou en *wigh* comme vous voudrez. Il n'importe, mais des nouvelles. On croit icy que le Duc d'Ormond est encore en France n'ayant pu passer et on n'a point de nouvelles certaines que le Ch. de St. George soit en Ecosse. Mr. de Waldegrave sans le fatal accident qui luy est arrivé, eut été dans la necessité de le suivre. C'est une consolation pour nous dans son malheur. J'ai envoyé à Mons. Bernoulli un des exemplaires de votre beau livre [127]). Ecrivez moy donc, mon cher Monsieur. Aimez moy, mandez moy si vous avez reçu mes lettres, et soyez sur que personne ne vous aime et ne vous honore plus parfaittement que moy.

Remond de Montmort.

Ce 2 Janvier. — Dans ce moment Monsieur je reçois une lettre de vous dattée du 6.X^bre^. Je ne sçai pour quoy elle a été si longtemps en chemin. Je vois avec plaisir que vous avez trouvé mes sommes telles que je les marquois dans ma lettre. Le 1er terme de cellecy —

$$\frac{1}{123}+\frac{2}{345}+\frac{3}{567}+4=\frac{1}{4}$$ [129])

ne peut etre $\frac{1}{13}$, l'ordre le fait voir et l'analogie, c'est ce qu'on apelle *lapsus calami*. Je verrai avec plaisir comment vos methodes donnent ces sommes. Aussitot que je serai à Paris, je ferai de la feuille [130]) que vous m'avez envoyé, l'usage que vous m'avez marqué. J'en ferai part à touttes les personnes qui ont votre excellent livre. Je suis ravi d'apprendre que Mr. Moivre que j'aime beaucoup, pense à moy, mais je suis en même temps bien

faché de sçavoir que sa santé n'est pas bonne. Que ne fait-il sa nouvelle edition[131]) en Latin plutot qu'en Anglois. Des livres excellens comme doivent etre tous ceux qu'il donnera doivent passer chez touttes les nations. La premiere lettre que vous me ferez l'honneur de m'ecrire, adressez la s'il vous plait dans le cul de sac de Guimené. Vos lettres me font un plaisir infini, Monsieur. Donnez moy souvent de vos nouvelles et adjoutez-y la faveur de me croire plus que personne du monde entierement à vous. Je ferai vos complimens à Paris, et je ne manquerai pas de vous ecrire quand j'y serai arrivé, et je vous manderai touttes les nouvelles des sciences que je pourrai apprendre.

4. Montmort an Taylor, 31. März 1716 (Ausg. 1793, S. 84—88).

Il nous seroit fort difficile Monsieur de faire venir votre cidre par Calais. Mylord Stair ne fait rien venir par cette voye. Il faudroit une permission du prince, et cela n'en vaut pas la peine. Ainsi il faut y renoncer, et que vous le buviez avec vos amis, ou bien il nous faudra tenter la voye de Rouen. Vous pouvez en parler à Monsieur Arbuthnot qui m'a fait mil amitiez à Londres et mil offres de services. Jl a un frere à Rouen riche negotient et galant homme à qui nous pourrions nous adresser, vous pour faire entrer votre cidre icy, moy pour faire sortir mon vin de France. Mr. l'Evesque de Troyes m' a dit qu' il a reçu une lettre de vous que luy a fait beaucoup de plaisir.

J' ai dans mon livre[132]) page 394 un Catalogue des enfans masles et femelles nés à Londres depuis 1629 jusqu' en 1710, pourriez vous m'en voyer la suite jusqu'en 1715 inclusivement? pourriez vous encore m'envoyer le nombre de vos morts? C'est à dire un registre des enterremens depuis le plus grand nombre d' annés qu'il vous sera possible? vous m'obligerez beaucoup. J'ai encore une autre grace à vous demander. C'est de m'envoyer une relation exacte et philosophique du beau phenomene[133]) que vous avez eu à Londres la nuit du 17 en 18, de notre style. J'en ferai le rapport à l'academie des sciences.

Mr. de Waldegrave qui est icy, etoit de prendre du caffé au lait avec moy: il me charge de vous faire mil et mil complimens de sa part. Remerciez bien pour moy Monsieur Halley de l'honneur qu'il me fait de se souvenir de moy dans la lettre qu'il a ecritte à Mr. de Fontenelle. Le plus grand nombre s'est opposé à faire imprimer le morceau de Mr. Keill[134]) dans les Memoires de l'Academie par la raison que Mr. Keill est etranger à l'Academie et que cela est contre les statuts. Je pris le parole, representai 1mo que le morceau est excellent, 2° que Mons. Newton est attaqué dans les memoires par Mr. N^as^ Bernoulli[135]) qui non plus que Mons. Keill n'est pas membre de l'Academie, 3° que s'il etoit jamais permis de faire exception à une regle generale, c'etoit en faveur d'un aussi grand homme que Mons. Newton, ou de Mons. Halley au nom de la Societé Royale.

Vous devez etre bien scandalisé Mons. de n'avoir point encore reçu ma reponse à vos objections contre nos principes et notre maniere de philosopher en physique [136]). J'espere qu'elle sera bientot en etat de vous etre envoyée. Je ne sçaurai trop prendre de precautions et peser avec trop de soin, ce qui est destiné pour des juges aussi eclairés que vous l'estes tous Messieurs. Nous sommes encore plus divisés sur la physique que nos theologiens ne le sont entre eux. Quoy que l'on voye un peu plus clair dans la philosophie que dans la religion, notre reunion sera difficile, *nam toto coelo distamus*. Il nous faut de bonnes preuves, je vous encherche, et comme rien ne plait à l'esprit que ce qui est dans un ordre naturel et methodique, je m'attache non seulement aux choses, mais aussi à la maniere de les dire.

Faittes toujours mes compliments je vous supplie aux persones qui me font l'honneur de se souvenir de moy. Tous mes amis de ce pays vous font les leurs. Mgr le Regent court grand risque de perdre un oeil qu'il s'est blessé en jouant à la Paume. J'ai lu il y a quelques jours la copie d'une lettre très curieuse que Mons. Leibnitz a ecrit a l'Abbé de Conty homme de qualité et de merite qui est parmy nous et que vous connoissez sans doutte [137]). Si vous ne l'avez pas vu, demandez à le voir. Comme il y a fort long temps que je n'ai reçu de vos nouvelles, j'en suis en peine. J'apprehende que vous ne soyez malade. Personne au monde ne s'interesse plus que moy à tout ce qui vous regarde, ne vous aime, ne vous honore plus parfaittement que moy.

Remond de Montmort.

Mademoiselle Plancy qui vous presente ses respects, commence à etre bien forte dans l'acompagnement. Dittes je vous prie à Mons. Moivre que je ne veux plus l'aimer puisqu'il m'oublie. — A Paris ce 31 Mars, 1716.

5. Montmort an Taylor, 12. April 1716 (Ausg. 1793, S. 93—98).

Je viens d'ecrire à Mr. Pigault et à Mr. Minet, au 1er pour sçavoir s'il voudra recevoir notre panier de vin et pourra le faire rendre a Mr. Minet. Au 2e pour sçavoir s'il pourra le retirer d'entre les mains de Mr. Pigault, et nous le faire remettre. Ce seroit dommage que ce bon vin fut bu par des commis de vos douanes: etant destiné pour des bouches philosophiques, et la belle bouche de Mademoiselle Barton. Je suis infiniment sensible à l'honneur qu'elle me fait de se souvenir de moy. J'ai conservée l'idée du monde la plus magnifique de son esprit, et de sa beauté. Je l'aimois avant d'avoir l'honneur de la voir comme niece de Mr. Newton, prevenu aussi de ce que j'avois entendu dire de ses charmes même en France. Je l'ai adoré depuis sur le temoignage de mes yeux, qui m'ont fait voir en elle, outre beaucoup de beauté, l'air le plus spirituel et le plus fin. Je crois qu'il n'y a plus de danger que vous luy fassiez ma declaration. Si j'avois le bonheur d'êstre auprès d'elle, je serais aussitot et

aussi embarassé que je le fus la 1 ere fois. Le respect et la crainte de luy déplaire m'obligeroit de me taire et à luy cacher mes sentimens. Mais à 100 liens loin et separé par la mer je crois qu'un amant peut parler sans etre temeraire, et une dame d'esprit souffrir des declarations sans qu'elle puisse se reprocher d'avoir trop d'indulgence. Jl vint icy il y a quelques jours une personne de sa part. Je n'y etois pas, vous pouvez croire qu'il fut bien reçu par Madme de Montmort aussitot qu'il se fut nommé de Madelle Barton. Il ne voulust point dire ce que l'amenoit, il dit seulement qu'il reviendroit. Madme de Montmort jugea que c'est une personne qui fait icy des commissions pour des personnes de qualité d'Angleterre. Je voudrois bien que Madelle Barton voulust m'honorer du soin de luy faire des emplettes et de me faire son commissionaire. Outre le plaisir de servir une si belle personne j'aurois celuy de m'acquitter envers Mr. Newton d'une partie des obligations que je luy ai.

J'ai ecrit en Allemagne et j'ay proposé vostre probleme où il s'agit de trouver une courbe que coupe à angles droits, et telles que sont exprimées par cette equation [138]) $zz\,ddx = 2xdz^2$. Mr. Nicolle [126]) y-doit travailler aussy. Pour moy cela me passe. J'ay pourtant rappellé mes anciennes idées sur ces problemes des trajectoires, et j'ay trouvé quelques problemes assez curieuses, par ex: l'analyse de celuy qui est proposé dans les Journaux de Leipsic, page 473. — „*Quaeritur curva quae omnes parabolas eodem axe extructas suaque latera respectivis verticum a puncto fixo distantiis aequalia habentes ad angulos rectos trajicit*". La trajectoire est une courbe geometrique très composée. Si au lieu du probleme proposé par Mr. de Leibnitz, les hyperboles qui ont même centre et même sommet mais differens parametres, on suppose même sommet, *même parametre,* mais que les centres changent, le probleme me paroist devenir extremement difficile à cause d'embarras de separer les indeterminés dans cette equation differentielle, $2xydx = axdy - 2yy\,dy$. Je n'en sçay point le secret.

Voicy un petit prob. que je vous propose parcequ'il ne vous tiendra pas un quart d'heure. Deux nombres etant donnés α et β dont l'un par ex. α soit plus grand que l'unité, et l'autre β plus petit que l'unité, trouver le produit que resulte en multipliant tous les nombres possibles plus grands que β et plus petits que α. Je l'ai trouvé par le secours de vostre belle suitte

$$\frac{1}{2-c} = \frac{1}{2} + \frac{c}{22+d} + \alpha.$$

Je vous dirois ma solution mais il vaut mieux vous laisser le plaisir de la chercher. Mr. de Fontenelle qui dina hier icy et avec qui j'ay bu la santé de vous Mons. et de tous vos illustres me dit qu'il avoit fait reponse à Mr. Halley. Mr. l'Eveque de Troyes m'a dit qu'il vous avoit ecrit. Je serois curieux de sçavoir quelle raison Mr. Moivre peut avoir pour ne me plus ecrire apres m'avoir ecrit deux fois depuis mon depart d'Angleterre. Tachez

de decouvrir confidemment quel usage il fait de mes 10 theoremes dont je luy ai fait part il y a deux ans, et qui se trouveront apparemment dans son livre accomodés à sa maniere. S'il rapportoit par hazard mes solutions comme de moy il y faudroit faire les petites corrections dont je vous ay fait part. Secret et discretion sur ces bagatelles je vous en prie. Je m'en rapporte à vous, mais ne faites pas semblant que je vous en aie parlé. Dans son petit traité *de mensura sortis*[133]) il a bien pillé mon livre sans me nommer. Il en pourroit peutetre encore bien faire autant à l'egard de la 2 de edition et des 10 theoremes. Ces tours de passe passe sont plus pardonnables aux personnes dont le metier est d'estre sçavant. Au reste je l'aime et il est tres bon homme, bon jour Monsieur je vous embrasse de tout mon coeur.

Remond de Montmort.

A Paris ce 12. Avril, 1716.

7. Montmort an John Taylor, 28. Mai 1717 (Ausg. 1793, S. 100—102).

Monsieur,

J'attends incessamment le quarteau de vin de Pierry que Monsr votre fils m'a demandé pour vous; j'y joindrai selon vos intentions cent bouteilles de Mulsan dont je crois que vous serez content, et je vous marquerai le jour du depart pour Calais à l'adresse de Mr. Pigault ainsi que vous le souhaittez. J'envoye a Mr. votre fils l'eloge de Mr. Leibnitz[139]) que je crois luy fera plaisir. J'y joins un volume qui vient de paroitre de pieces de Clavecin très estimées en ce pays. Jl sera à l'usage de Mademoiselles vos filles qui en jouent très bien à ce que j'ay appris. Je suis bien faché Monsieur que la santé de Monsr votre fils ne soit pas bonne, je l'aime extremement et ne l'estime pas moins. Il s'est fait un grand nom dans les sciences, et tous ceux qui les aiment ont interest à sa conservation. C'est un homme rare qui vous fait honneur et à toute sa nation. Si sa santé ne se retablit pas entièrement par l'usage des eaux d'Aix la Chapelle et de Spa, je vous invite Monsr à nous l'envoyer. L'air de France est bon aux Anglois. Ma terre est dans un très bon air, peutêre que 3 ou 4 mois de sejour avec nous luy rendroient une santé parfaitte. Nous en aurions tout le soin que vous en pourriez avoir vous même. Il a pu vous dire que nous sommes sobres et assez sages. Il menerait avec nous une vie reglée, et qui ne seroit pas sans plaisirs. Tous mes amis qui l'ont vu l'aiment pour la politesse et la douceur autant que pour l'agrement de son esprit et l'etendue vaste de ses connoissances. Il n'y auroit pour luy dans ce voyage ni beaucoup de depenses ni beaucoup de fatigue. Il iroit de Spa à Charleville en traversant le Luxembourg, et delà n'auroit pas plus de 25 ou 30 lieues pour venir à Montmort. Il se perfectionnerait dans la connoissance de la langue Française. Je me recommande Monsieur à l'honneur de votre amitié. J' assure de

mes humbles respects Mad^{elles} vos filles, et vous prie de croire que personne n'est plus parfaittement que moy,

Monsieur,

Votre très humble et très obeissant serviteur,

Remond de Montmort.

J'aurois envoyé relié le recueil de Couperon, mais Mr. Lully qui s'en charge ne l'auroit pas porté si commodement.

9. Taylor an Halley, 21. Oktober 1718 (Ausg. 1793, S. 103—4).

Sir,

This being the time that the Gentlemen of the Royal Society usually return to their ord'nary meetings, I cannot reflect upon it without very great concern that my private affairs will not permitt me sooner than three weeks hence to attend their service, as my duty, being Secretary, requires. I find that my circumstances for the future will be such, that I shall not be in London long enough to discharge the duty of that office so completely and so punctually as I ought to do, and as I fain would do, to shew how sensible I am of the honor I enjoy in having been thought worthy of it. Wherefore I beg the favor of you to present my most humble duty and thanks to the R^{t} Honble the President and Fellows of the Royal Society, for the honors they have hitherto been pleased to bestow upon me; and to pray them at their next election to be pleased to appoint some other person to be Secretary in my stead. I am very much concerned that I can no longer enjoy the honor of that character, there being nobody more zealously disposed and desirous to serve the Royal Society, in any manner, than,

Sir,

Your most humble servant,

Brook Taylor.

The following line I will interpret when I see you:

$r^n - 1 + 4nr^2 + vr^2$ [140]).

13. Joh. Bernoulli an Montmort für Taylor, 26. Januar 1719 [141]) (Ausg. 1793, S. 105—9).

. . . . . J'estime Mr. Taylor pour le genie tout particulier qu'il fait paroitre dans ses productions, je vous prie de luy faire mes complimens, et de luy dire que je luy offre mon amitié s'il la daigne accepter. Mais je l'exhorte à s'abstenir à l'avenir de ces sortes d'expressions dont il s'est servi dernierement dans l'exorde de sa solution des trajectoires imprimée dans les transactions [142]), parceque ces expressions là marquent trop de mepris pour nous autres etrangers, et avec cela une aigreur incedente à un galant homme. Si Mons. Taylor veut entrer en discussion avec moy sur des affaires de mathematiques, mais une maniere honêste et paisible, je promets de reprondre avec tous les egards qui luy sont dus. Quand à la reduction de cette quantité

$$\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\,dz}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$$

ou de cette autre

$$\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\,dz}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\mu}}$$ [143])

que Mons. Taylor propose aux Geometres de l'Europe, il me semble qu'il serait juste de m'exempter aussi bien que Mr. Newton d'un pareil traveil et nous laisser reposer l'un et l'autre à l'ombre de nos lauriers selon les expressions obligeantes de vostre lettre, d'autant plus qu'il n'y a je crois personne qui ait plus travaillé que moy sur la matiere des reductions. C'est sans doutte de mes traveaux meme que profite Mons. Taylor; et s'il a poussé plus loin mes productions il devroit m'en sçavoir gré parceque je luy ai rompu la glace, sans quoy il n'auroit peutêstre pas pensé à ces choses là. Si vous voulez prendre la peine de lire ce que j'ay communiqué autrefois dans les memoires de 1702 et dans les actes de Leipsic en 1703 [144]), pour integrer les fractions rationelles (ce que vous plut alors extrêmement si je m'en souviens bien) vous avouerez qu'il y a beaucoup d'apparence que Mr. Taylor ne se sera point servi d'autre methode que de celle que j'y ai enseignée, et que ce qu'il y aura trouvée de surcroit ce sera peutêstre quelque modification de ma methode pour empecher qu'on ne tombe en des limitations par les racines imaginaires pour ses exemples proposés, *ou je me fais fort de trouver aussy une telle modification.* Et si Mr. Taylor en doutte, il n'a qu'à en faire l'epreuve: voicy le moyen que je propose. Nous remettrons chaqu'un entre vos mains une somme d'argent. Par ex: 50 guinées. Je vous envoirois ma solution, et vous en serez juge. Si elle est juste vous me renvoirez mes 50 guinées, avec les 50 guinées de Mr. Taylor. Si ma solution n'est pas legitime, ou que ne puisse en trouver dans le temps dont en conviendra, je consenterai que vous remettiez à Mons. Taylor les 100 guinées. Je m'engage à luy rendre la pareille. C'est à dire que de mon coté je luy proposerai aussy un probleme dont je possederai la solution: et nous parierons de meme, en sorte que s'il le resoud legitimement dans le temps stipulé il aura mes 50 guinées, s'il n'en vient pas à bout, j'aurai les siennes. Je me soumets comme j'ay dejà dit, à votre jugement parceque je vous connois intgre et connoisseur. Faites cette proposition à Mons. Taylor. Il l'acceptera infailliblement n'y ayant qu'à gagner pour luy et rien à perdre. C'est là le party le plus court à prendre pour n'etre pas continuellement inquieté par des nouveaux problemes. Je vous supplie donc de dire à ces Messieurs que je leur declare une bonne fois que desormais j'imiterai Mr. Newton, en ce que je garderai le silence quoy que puissent dire Mr. Keil et ses semblables. Et je ne ferai aucune attention aux problemes qu'ils

pourroient proposer à moins qu'ils n'aient le courage d'accepter un parti tel que je l'offre à Mr. Taylor. . . . . .

14. Taylor an Montmort, 5. Februar 1719 (Ausg. 1793, S. 109—118).

. . . . J am wonderfully obliged to Mr. Jo. Bernouilli, for his great condescension in being pleased to offer me his friendship. That offer would have been much more kind, if he had made it, before he was pleased to charge me with plagiary in the *Epistola pro Eminente Mathematico*, or treated me again in the free manner he does, in his last treatise on the *Isoperimeters* [145]). As to the preface to my solution of the prob. of the Trajectories [142]), whose sharpness he complains of; I own that I intended it, as he takes it; that is, I intended to shew an indignation at the unreasonableness of his proceeding; and those other Gentlemen, whoever they be, who could not forbear to quarrel with the whole English nation, upon account of a dispute, that only concerned two private persons — Sir Is. Newton and Mr. Leibnitz; and who were so stupid in their manner of reasoning, as to think that dispute might be determined, or in any matter affected, by a challenge made to persons who were not at all concerned in it: because, forsooth, they happened to be of the same country with one of the parties. Sir Isaac Newton himself was owned to be excepted from that challenge, as having long neglected those kind of speculations. The concern I had for the honour of my country, provoked me to enter the lists. But I did not design to have it thought, that I intended to make a comparison between our abilities and the abilities of those Gentlemen. They made the comparison who gave the challenge; and not I, who only shewed that we had no reason to be afraid of it. And I was so far from shewing myself to approve of that foolish way of comparing of countries, that I purposely avoided mentioning of Germans, or any other nation, besides my own that was challenged; that my intention might be understood only to be confined to those particular persons, who were concerned in this matter. I named nobody, and knew of nobody, in particular, *but Mr. Jo. Bernouilli;* though I suspected his son and nephew to be concerned with him. But I have no particular objection myself to either of those gentlemen. It is plain now, by his son's confession, that I was not mistaken, in supposing that reflection on me in the *Ep. pro Em. Math.* to proceed from him; and I could not help believing, that he was the occasion of that most injurious and unfair account of my book in the same *Acta* [146]). At least, I evidently saw, that it proceeded from the spleen that was raised by the dispute with Mr. Leibnitz: and these two things, I own, provoked me to be more free in my expressions in that Preface [142]). But I never concerned myself so far in that controversy, as to give my judgment of the merits of the cause, and contend about it, as Dr. Keil has done: nor had I ever said one word relating to it, good or bad, that could

occasion such usage of me, before that Preface [142]). I shall take occasion, very soon, to vindicate myself publickly from the ill usage Mr. Bernouilli has bestowed on me. As to his challenges, I will have nothing to do with them; for it is far from my intentions, ever to set my abilities in comparison with his. I never said, that I believed Mr. Bernouilli could not solve Dr. Keil's problem [147]): and when I told you, „I could do it", I never intended he should understand it, as if I thought I had done a thing which he could not. I will easily believe, his solution may be better and more general than mine, and therefore will not put mine in competition with it. I will send it to you to satisfy your own curiosity; but desire you will never send it to him. That he may not have the least occasion to think I make any comparison with him, I do not intend to publish it at all. As to the other problem, about the Quadrature of Curves [148]), it is not properly mine: for the thing is done by another, some years ago; that is, by Mr. Cotes; and is going to be printed in his works, which will make the world sensible of the very great loss of so extraordinary a genius. I have never yet seen his solution: but upon the information I had of it, I considered the matter, and solved it in the cases I sent you, and several others, and have a demonstration of the possibility in all cases; though the actual calculation is too intricate. I know very well what Mr. Bernouilli and Mr. Leibnitz have done in this matter; but there is nothing very extraordinary in their discoveries, nor nothing new. For they have only spent a great many words, without any addition of matter, on a thought Sir Isaac Newton had already made use of in his Tables of Quadratures (I think it is in the 6th form), where he gives the quadrature of this form $\frac{z^{\frac{1}{2}}y-1}{e+fz\eta+gz^{2\eta}}$ [149]). Mr. Leibnitz pretends to demonstrate the impossibility of what Mr. Cotes and I have done; and Mr. Bernouilli seems to have acquiesced in that pretended demonstration, by his having shewed nothing to the contrary, and his silence: but if he knows better (and I am very sensible he has much improved in his skill since that time), he has now an opportunity of shewing it, before Mr. Cotes's papers are published [150]).

It is impossible to express admiration enough at Mr. Bernouilli's excess of vanity, which makes him imagine himself to be the sole instructor of all the world. I can easily forgive his pretensions to have instructed me, because he has now lately pretended to have taught Sir Isaac Newton himself: for I cannot believe it to be without his knowledge, that his friend *Crusius* has asserted in express words, Sir Isaac Newton to have learned second and higher fluxions of him [135]). But to abstract from what is partikular to myself: let any one ask him, if there be nothing in the French Memoirs, or in the Leipsic Acts themsel-

ves, but what he has done? Will he allow nothing to his hero Mr. Leibnitz, or to his pupil, the Marquis de l'Hopital? the accident of whose being taught mathematics by him, has done him more honour, than any thing he ever else did in his life can deserve; and whose most delicate and curious performances are too unjustly so much imputed to his master. His own brother, it is evident, he will allow to deserve but little reputation, by the usage he gives his memory. But must Mr. Varignon, Mess[rs] de la Hire, de Lagny, etc., of your Academy, from every one of whom one may learn more elegant and more sound mathematics, than from him, be allowed nothing by him? It is impossible for a young student to have learnt any thing from these persons, as well as from him? Not to mention what an Englishman may have learnt from Sir Isaac Newton's *Principia and Quadratures,* from our own Transactions, and from other books of our own authors; which are enough to teach one, at least, as much as Mr. Bernouilli can pretend to know. Having already made my letter to long, I will be but short in giving you my reflections on his late tract on the Isoperimeters [151]). He has at last found out, that his first essays on that matter (in Mem. de l'Academie, 1706)[152]) are somewhere faulty: but though he has examined them all over with the greatest care, he cannot tell where. To make amends for this, he pretends to give a rare new solution. To pass this the better upon the world, he does all he can to discredit the performance of his deceased brother; and least my solution too should be taken any notice of, you know in what manner he treats me. But when one comes to examine this wonderful performance, and these vast new discoveries,which the world must needs be so much obliged to him for the discovery of; what is it? why nothing but the very solution of his brother, put in other words, and delivered in a shorter method. His manner of explaining the thing, indeed, is elegant; but the whole form and substance of the analysis (and it is that a solution consists) is the very same with his brother's. And as to the expedient he so much values himself upon, by which he avoids thirds differences (and about which he runs down his brother so much), it is plainly nothing but the very same thought which I myself have made use of, in my book, pag. 113. lin. 2, 3. penult. et antepenult; and have given sufficient hints of it in other places. This discovers the reason why he was not contended only to run down what I have done in this problem but he must needs also condemn my whole book. For if that book be so very obscure, as he says it is, that the best artists, those who are already acquainted with the subjects, cannot well understand it, to be sure no one will discover this piece of theft. You may let Mr. Bernouilli know all this: and besides, that when I have done myself justice in these points, I shall think myself not obliged to take any more notice of him, let him treat me in what manner he pleases: for it is not my business compare myself, and to

spend my time in disputes with any body; but to pursue my own curiosity, in the way that is agreeable to me, etc. etc.

17. Taylor an Keill [153]), 7. Mai 1720 (Ausg. 1793, S. 118—19).

Sir,

I think you are very right in the method you propose to use towards J. Bernoulli. As to the Extracts I sent you, I fancy you may print them, because Sir Isaac Newton says, the letter of Montmort to me, which they threatened you with, is already printed. I shall give Mr. Jones a copy of it; and if you will, you may print it with the rest. I believe he has my papers, where I demonstrate the possibility of the Quadrature of all Curves, whose ordinates are expressed by a rational fraction, such as $\frac{a + bx^{\eta} + cx^{2\eta} \text{ etc.}}{A + Bx^{\eta} + Cx^{2\eta} \text{ etc.}}$ and I will desire him to let you have a copy of it. I have looked over Bernouilli's solution of my problem in the Leipsic Act, for June last [154]), and find his seven first theorems, which he values so much, are only cases of Sir Isaac Newton's Quadratures; and the 8th is one of his first propositions, extended by the Quadratures: this is a good proof how little he understands that look. I have examined what you desired me in Herman, and find it right, but so sadly expressed, that it is an easy matter to suppose him all the way making mistakes. I am, Your most humble servant,

Brook Taylor.

18. Conti an Taylor, 22. Mai 1721 [155]) (Ausg. 1793, S. 121—5).

Monsieur,

Je m'en vais vous expliquer en peu de mots les raisons qui m'ont engagés dans la querelle de Mons. Newton et de Mr. Leibnitz. Mr. Newton me pria d'assembler à la societé les Ambassadeurs et les autres Ministres Etrangers. Il souhaitait qu'ils assistassent à la collation qu'on devoit faire des papiers originaux, qui se conservent dans les archives de la societé, avec d'autres lettres de Mr. Leibnitz [156]). Mr. le Baron de Kirmansegger [157]) vint à la societé avec les Ministres des Princes; et après que la collation des papiers fut faite, il dit tout haut, que cela ne suffisoit pas, que la veritable methode pour finir la querelle, c'etoit que Mr. Newton luy-même ecrivit une lettre à Mr. Leibnitz dans laquelle il luy proposât les raisons, et en meme temps luy demandât des reponses directes. Tous les Ministres des Princes qui etoient present goutèrent l'idée de Mr. Kirmannsegger [157]); et le Roy même à qui on la proposa le soir, l'approuva. Ayant dit tout cela à Mr. Newton, cinque ou six jours après il m'escrivit une lettre pour envoyer à Mr. Leibnitz à Hanover [158]). Mr. Newton, peut il dire que je l'ay prié de m'adresser cette lettre? cependant la necessité de l'envoyer à Hanover, et de l'accompagner d'une des miennes m'engagea dans la querelle. La lettre qui fût portée à Hanover par le Baron de

Discau, resta plus d'un mois à Londres, Mad^me^ la Comtesse de Kirmansegger[157]) la fit traduire en François par Mr. Coste: le Roy la lût, et l'approuva fort, en disant que les raisons etoient très simples et très claires, et qu'il etoit difficile de repondre à des faits. J'ay lu à Mons. Newton la lettre que j'escrivois à Mons. Leibnitz; c'est Mr. de Moivre qui me l'avoit corrigé et j'en conserve encore la brouillon: Mr. de Moivre y-avoit ajouté quelque chose à l'egard de la maniere equivoque dont Mr. Leibnitz avoit proposé le probleme[159]). Mr. Leibnitz fut fort irrité de la lettre que je luy avois envoyé, comme il paroit par sa reponse[160]), et par des expressions assez fortes qu'il avoit avancé contre moy dans ses lettres à S. A. R. la Princesse de Galles[161]). Il ecrivit plusieurs lettres pour sa justification que j'ay donné à Mons. Newton à proportion qu'elles m'ont tombé dans les mains; Mr. Newton en fit une espece de reponse qui fut imprimée avec la premiere lettre a la fin de l'Histoire des Fluxions[162]); les lettres que Mr. Leibnitz m'avoit adressé, furent aussy imprimées dans le même livre; et Mr. Leibnitz en fit non seulement oter mon nom; mais encore me fit aucune part qu'on les imprimoit. Quand Mr. des Mesaus[163]) luy proposa de les imprimer de nouveau en Hollande, il luy donna son approbation, et dit même qu'il luy fourniroit quelque autre petit papier. J'ignore ce qui est arrivé d'après, parce que j'ay quitté l'Angleterre. On dit que Mr. Newton a changé de sentiment et qu'il se plaint de moy de l'avoir engagé dans la querelle avec Mr. Leibnitz: je le prie très humblement de reflechir à des faits qui sont incontestables; et par lesquels il paroit assez que je n'ay eu d'autre part à la question qu'autant qu'il voulut bien m'en faire. J'ay essuyé tous les reproches des Allemans, et de Mr. Leibnitz luymême pour soutenir ses raisons. Je les ai aussy soutenu en France où malgré tout ce qu'on à l'adresse de luy ecrire en Angleterre, on n'est pas trop dans ses interets comme il pense. J'ai pensé un jour me brouiller avec un grand Mathematicien chez une Dame, où on parloit de cette dispute; il soutenoit que tous les argumens du *Commercium Epistolicum* n'etoient pas concluans; et que Mr. Newton n'y avoit aucune part, non plus qu'aux lettres qu'on avoit imprimées par son ordre. J'aurois bien d'autres choses à dire là-dessus: mais je suis las d'entendre parler d'une matiere qui n'est pas agreable. On a voulu me commettre avec Mr. Newton, et je ne sçay pas pourquoy: je l'ay toujours honoré et respecté; et je luy ay toujours dit la verité sans aucun interêst: mais si les plaintes continuent, je ne pourray pas me dispenser de faire imprimer la simple histoire d'un fait[167]), qui fera voir au public que je n'ay pas pretendu me meler dans cette querelle pour acquerir du nom.

Mr. je suis,
Votre très humble,
et très obeissant serviteur,
Conty.

A Paris ce 22 May, 1721.

20. Conti (?) an Taylor, 15. Januar 1724[165]) (Ausg. 1793, S. 139—141).

Monsieur,

Voicy un des calculs astronomiques que Mr. de l'Ysle envoit à Mr. Halais[166]), comme je ne suis pas en commerce de lettres avec luy, je vous l'adresse, permis à vous de le lire, si vous en avez envie; Mr. Halais[166]) ne sera pas fâché, peutetre, de voir ce qu'on a remarqué en France sur le passage de Mercure. Vous m'avez entierement oublié, mon cher amy, je n'ay pas fait de même; et my Lord Boulinbrok vous dira, que je ne le vois jamais sans demander de vos nouvelles; il m'a dit que vous allez vous marier pour la seconde fois, je vous souhait tout le bonheur possible; vous le meritez. On ne vous verra donc plus en France. Vos amis vous regrettent tous les jours, et vous en avez bien au Luxembourg. Je viens de lire ce qu'on a fait contre vous dans les Actes de Leipsique, on m'y fait entrer, je ne sçais pas comment; mais autant, que je puis concevoir, feu Mr. Varignon avoit demontré, qu'on pouvoit prendre le cercle pour un polygone et que j'avois esté le témoins de la demonstration[167]); si vous en souvenez, il s'en faut bien qu'il convainquit l'un et l'autre. Il me semble même vous en avoir parlé dans une lettre que je vous ecrivis dans ce temps là. Mandez moy, si vous travaillez à votre ouvrage. Je le souhait ardemment pour vous, et pour le public. C'est la veritable réponse, que vous pouvez faire à Mr. Bernouilli et je ne doute pas, que la netteté, et la clarté, dont vous developperez vos idées, ne le fassent enrager. On m'a dit, qu'on avoit fait en Engleterre quelques ouvrages assez methodiques en mathematique, et en physique: dites moy ce que c'est; et si on a fait depuis peu quelque nouvelle decouverte. On m'a dit aussy, que Mr. Newton imprime la Chronologie Raisonné[168]). Tout le monde l'attend avec bien de l'impatience. Faites luy mes compliments, je vous en prie; voicy un petit Sonnet que vous luy communiquerez; j'espere qu'il en sera content; car il verra l'attraction designé par l'amour qui regle le sistême de Mr. Descartes designé par Phaeton. Dans le Memoire de Leipsique, il aura vu si je suis du parti des Allemands:

„Lasciami il curro Governar de giorno"
Disse à Febo l'Amor, „e tosto sia
Rectificata in ciel l'alta armonia
Che Fetonte turbó con suo gran scorno
Io diedi sede al cancro ed al capricorno
Ed al corpo lunar l'obliqua via
Io sterno al par de Caos; ed Io con lumen
Forzo al mondo l'equilibro; ed Io l'adorno.
Disse;" e le Briglie imperioso stese
E corresse l'Aurora, ed agli infiniti
Fonti del lume il corso antico rese
Ritornó i Pianet' ai primi siti

Il Solar Orbe a perni scai s'apese
E tal 'fu poi qual' O Newton l'additi.

Par l'Abbé Conti.

Anhang B[170]).

CONTEMPLATIO PHILOSOPHICA.

AN ESSAY *,
BY THE LATE
BROOK TAYLOR, L.L.D. etc. etc.

(Ausgabe 1793, S. 41—80; alte Seitenzahlen am Rande bemerkt).

Substance is a thing subsisting of itself, by the reality of own
[42 nature, without any ex- [trinsical cause required to keep it in existence; which existence is not conceived as an effect, but as a matter of fact, — a mere actuality, which will always continue, unless some positive active cause does interpose and alter it. That a Substance now existing continues to exist, is not the effect of any actual cause, supporting its existence, by a positive act, as it were, continuing its existence, which would otherwise cease and fall into nothing, mere non-entity, if it was not thus upheld; but the pure negation of any cause destroying and annihilating it.

For the same reason that a Substance, according to this definition is conceived as existing to all eternity by its own nature, or at least till some cause by a positive act destroys it; it may also be conceived to have been created *ex nihilo*. From whence it appears, that creation *ex nihilo* cannot be proved by the light of natural reason without revelation. For since the thing may continue to exist of
[43 [itself till to-morrow, it may have continued to exist ever since yesterday; and by the same reason, from all eternity, so as not to have been at all. Therefore, before you can prove a Substance to have been produced *ex nihilo*, you must first prove the fact, of its having once not existed, which cannot be done by the mere light of nature, as is already shewed.

Corr. 1. According to the light of nature, it is most probable that all Substances, viz. the spirits of angles, men, etc. and bodies, were not produced *ex nihilo*, but have always existed; — not by a necessity

*) This essay, valuable as it is, and of intrinsic merit, yet bears many allusions to a further progress in the investigation of truth, which are in proof that it was considered by its author as a mere chapter, or prefatory to some more extensive undertaking. The Editor possesses many detached writings of Brook Taylor, which declare his design in beginning this work, and his intentions of future proceeding. As to the first, he originally entitled the treatise: — „Some reflections relating to the first principles of general philosophy;" and he began it in these words: „In the searched of truth nothing seems to be so much wanting as to settle rightly, what the extent of the knowledge we are capable of attaining to, by the help of our own *uninspired natural faculties*," etc. etc.

170) Über den Inhalt, die Entstehungsgeschichte und Erstveröffentlichung vgl. oben S. 1, 6/7 und besonders 57 ff.

of nature, for there is no such necessity belonging to them, but by mere matter of fact.

Cor. 2. According to the same light of nature it is most probable, that the modes and affections of Substances are the only objects of active powers, and not the existence of the Substances themselves.

Time is a substance, whose essence consists in a certain attribute which we have no proper [name for, but which we commonly call [44
the Extension of Time, upon account of which Time is a quantity, having *partes extra partes;* such as are ages, years, months, weeks, days, hours, etc. which are known from one another by their proportionate lengths. This is the only attribute of Time; upon account of which it is perfectly uniform and similar itself, necessarily existent, unchangeable, and inactive. All other beings exist in Time; what exists, in no Time, does not exist at all. Things exist in Time; but by so existing they do not affect, or in any wise alter the nature of that part of Time they exist in. When, early, soon, late, old, young, duration, etc. are terms expressing the modes and affections of things as they are referred to, and considered with respect to Time. When, then, now, etc. are terms referring to the particular parts of Time, which things have their existence in. Early, soon, late, first, last etc. are terms relating to the order of things in Time. Old, young, etc. are terms which refer to the quantity of Time which is taken up by the [continuation or duration of things in Time. Continuation signifies [45
sometimes the filling of some part of Time without intermission; and in that sense, it is not said of Time, but of the duration of things in it. In another (which is the original) sense, continuation is opposed to intermission, and signifies the immediate connection of the parts of any thing; in which sense Time is a *continuum;* it continues because its extension has no intermission. Duration is not properly an affection of Time (or another name of Time as it is often used), but that affection of things, by which they are considered as filling Time. That thing endures which fills or continues a part of Time, but that part of Time itself is not said to endure. The whole absolute nature of Time is infinite, within which are contained all the finite parts of it, by which we measure the duration of things.

Space is a substance whose essence consists in extension, properly so called, that extension being taken all possible ways: for ex- [ten- [46
sion, strictly speaking, in its original signification is the attribute of a line: but it is commonly used to signify the modes of quantity that are found in surfaces and geometrical solids, as well as in lines. Therefore a line is extended but in one sense, having only length. A surface has a greater degree of extension; length being found in it, in an infinite manner of ways, but under a certain limitation; there being length and breadth, but no thickness. Geometrical solid, or Space, is extended all manner of ways; in that there being found both length, breadth and thickness. Space is an extended substance, and nothing else. Extension is its only essential attribute, as what we call extension of time, for want of another name, is the only attribute of that. Space is necessarily existent, and consequently eternal; it is unactive, un-

passive, and infinite in its own extension, as time is. All finite Spaces are comprehended within the infinite Space, as the parts of time are
[47 contained in the infinite [time; that is, in the same manner as every *pars integrans* is contained, and comprehended within the compass of its *totum integrale*, as inches are contained in a foot. Space is not the place of all things, minds as well as bodies, as some philosophers have falsely imagened, attending too much to their fancy and imagination, and not weighing things by their pure intellect, which judges of the images and sensations of the fancy, and abstracts from them. Space is the place of nothing but body, of which only it can be said, „that it is here, there, no where, great, small, etc. Those terms having all of them a reference to extension, which is the attribute of Space, and upon account of which body fills Space — other beings that are not corporeal, cannot be said to be in place; cannot be said to be great or small, when those terms refer to the quantity of extension, for those things have no more relation to extension, than sounds have to colours. Body is in Space, and fills it; but the place is not affected
[48 or altered in its [nature by the body which is in it; nor the body by the place.

Body is a substance whose only attribute is solidity, which necessarily must exist in space, and fill space by so existing. Solidity is that by which a Body fills space, so as to exclude all other Bodies from that same place whilst it is there. Solidity, thus explained, is evidently distinguished from hardness; which is solidity, with cohesion of parts added to it: but pure solidity may be either with or without cohesion of parts. Water is as solid as a stone: but water is not hard, though a stone is. By its solidity every body fills a portion of space adequate in quantity to itself. Upon account of its thus filling space, Body is said to be extended. But the extension is not properly the attribute of the Body, but of the space the place it fills. Body is therefore said to be extended, because its parts are distant from one another, and those parts are therefore said to be distant,
[49 because they are in different places, which difference of place, [is, what is properly called distance. So that extension and distance belong to body only upon account of space, but to space originally and by its own nature. The idea of solidity is not necessary, but contingent; for it is no contradiction, but an evident possibility to attend to the idea of solidity, and at the same time to suppose no solid being to be actually existent. It is equally possible to conceive Body existent, or non-existent. Therefore the essence of Body is indifferent to existence, or to non-existence. Therfore Body is not necessarily existent. Therefore Body is not necessarily infinite. Therefore the finite parts of Body are distinct substances entirely independant on one another. Therefore the parts of Body do not necessarily cohere by their own nature. Therefore cohesion is a phaenomenon which requires an extrinsical cause to account for it: it is a constant effect, which would cease, and the Body be no longer hard, if that cause should cease to
[50 act. Therefore Body is moveable. Therefore motion is com- [municated among Bodies according to the laws of nature (as explained by

Sir Christopher Wren, Dr. Wallis, Sir Isaac Newton). The *vis inertiae*, mentioned by them, being nothing positive, distinct from, and superadded to the nature of Body, for it is only the necessary consequence of that property of Body, by which two particular Bodies cannot be in the same place at the same time. It being necessary for a Body to exist in place, that Body which exists no where, exists not at all. But this maxim is applicable to no being but Body. Body is entirely of an unactive nature; therefore when a Body, formerly at rest, does afterwards move, or, on the contrary, there must be some extrinsical cause assigned of this phaenomenon, because the thing was not capable of doing this itself.

Mind or *Spirit* is a substance which we have but a very imperfect knowledge of, because we have no conception, no idea, of its essence. The name of Mind or Spirit we give to our own souls, and suppose angles, and even God [himself, to be of same nature. By reflecting [51
on what passes within ourselves, we find Mind to be capable of these three things; perception, sensation, and action. By perception we see and conceive things; by sensation we feel and taste of pleasure and pain; and by action we perform all we do. The Mind has commonly been conceived by philosophers, as having but two faculties; the understanding, by which we perceive things, and the will, by which we act. But in this distribution of the powers of the mind into faculties, there was not care enough taken to distinguish every thing that passes in us; for sensation and perception, though the mind is passive in them both, are certainly as different from one another as can be. It is surely a thing of a quite different kind to perceive two and to be four; and to be glad or sorry. These things we perceive and know to pass in our minds, yet we know not what that attribute, that essence of our minds is, which makes them capable of them; and therefore we know [not how they are performed. We look upon [52
these three things, as the exercising of three powers of the mind, which itself we conceive to be indifferent to the exercise or forebearance of either or all of them; just as Body is indifferent to motion or rest. We conceive that the soul may exist without either action, perception, or sensation, though we have no idea of it in that state, as we have of Body at rest; because we have no knowledge of the essence of the soul, but only of these its secondary qualities, by the means of which we know the fact of its existence, though they do not inform us of its essence. These faculties are conceived as quite distinct things from one another; and therefore it is hard to know how they are connected in, and how they proceed from, the same nature. It is absurd to ask a physical cause of the action of a Mind, as we do of the beginning of motion in body, because body cannot move itself: but the actions of Mind are from itself, and therefore must have no cause asked of them; for that would be to [deny Mind to be an active being; it [53
would be to deny that there is any such thing as action *in rerum naturâ*. The Mind finds itself uneasy in its present condition, sees what action of its own will remove that uneasiness, and therefore it is reasonable to expect that it should exert that action. But yet when

it exerts that action, it does it not necessarily; it is not a physical consequence of that uneasiness it now feels, or of that perception of its own power; but that action is the pure and simple effect of the Mind's own self-determination, which has no physical necessary cause antecedent to it; but might have been exerted or not, not withstanding any influence of the knowledge the Mind has, or of its present sensation. It is hard to conceive how any thing can direct its own action, and not perceive both the object of that act, and its own power of exerting it; therefore it is most probable, that understanding and will are necessarily connected in the same essence. But where these two
[54 are joined, it seems that there [is a full power of action, and therefore that sensation is not necessary to an active being: though it is hard to find a reason why a being that has not sensation, should rather act than not, in any particular instance; yet the thing is possible, and it is probable that that being has sensation, and that that faculy is should. Mr. Leibnitz thinks there would be no action; but he brings no proof of it, but an hypothesis of his own; and therefore may be properly said to beg the question. It must be granted, that it is not probable that there would be uniformity and design in the actions of a being that has no sensation; and therefore where the actions of any being discover a uniformity, and a visible tendency to a certain end, it is probable that that being has sensation, and that that faculty is gratified by the accomplishment of that end. This is the case of all agents we are well acquainted with, they all acting for the most part agreeably to the view they have of the present most apparent good;
[55 that is, according to that which appears to [them most likely to give them pleasure, either positive, by real enjoyment, or negative, by the avoiding of evil. I say, that men, for the most part, act according to this view of what would be best for them, but not always: for every one is too notoriously sensible that he does sometimes choose a smaller present and transient good, in preference to a more substantial and lasting one, which he might have chosen. This is not to be accounted for, but by the mere spontaneity of action; and even when we have considered that, it leaves the Mind full of wonder and amazement, that any agent should be such a fool, and so indiscreet. We wonder at folly, though we see it, and practise it ourselves every day; because it is unreasonable to quit a greater good for a less, or to submit to evil, when it may be avoided. Yet we see that it can be done, and too often is done; and the power of so doing is the foundation of all morality.

According to this account of proper selfactivity, the actions of
[56 a Mind seem to be the [most entirely free, and void of necessity, that is possible, and indeed they are truly so; for the Mind does never exert any action, but it had it in its power to have forborn it, even with the same entire view and sensation of all those circumstances upon account of which it determined itself to act. This entire freedom of action seems to most persons to make the actions of Minds the most perfectly contingent and void of certainty: yet if we consider this matter carefully, we shall find, that though upon account of the

spontaneity and freedom we have described, the actions of Minds are most truly contingent, as contingency is opposed to necessity (I mean physical necessity, which is found in all those things that flow immediately from the nature of the subject, as the uniform motion of body), and yet they may never the less be so far from uncertainty, as to be certain in the highest degree. It is hard to reconcile certainty with absolute freedom of self-action, which is the only foundation of all morality; because it is hard to se- [parate certainty from phy- [57
sical necessity. But those two things are not necessarily and essentially joined. For though my action, in certain circumstances, be absolutely spontaneous and from myself; yet it may be certain that I shall act thus, rather than otherwise. It seems not to be to know how a man of known wisdom will act on a certain occasion; yet that action is entirely free and spontaneous. Where the character of the agent's wisdom is imperfect, it seems to be but probable how he will act in certain circumstances; it being but probable that he will follow right reason. But where the wisdom of the agent is consummate and altogether perfect, it is certain that he will follow right reason, and therefore certain how he will follow right reason, and therefore certain how he will act upon any occasion: but all this while his actions are entirely free and spontaneous, and therefore truly contingent, and not (all?) necessary physically; because he has it in his power to do otherwise than he does, though it is certain he will not. What in the nature of any
[agent can be cause of this absolute certainty which does not proceed [58
from physical necessity, but is perfectly consistent with perfect freedom, and the truest spontaneity, and therefore does not all interfere with morality, is impossible for us to know; because we have no knowledge of the essence of Mind, wherein that certainty is founded. For the same reason we cannot assert, but that the actions of beings less perfect in the character of wisdom, may be absolutely certain in the same sense, thoug entirely spontaneous, and therefore subject to morality. I say, we know not enough of the nature of Mind, to assert this to be impossible; on the contrary, the prescience, or foreknowledge of God, which we have the fullest testimony of, that can be, does seem in fact to prove it. But of this*) more largely by and by.

[Though we have such imperfect knowledge of our own Minds, [59
yet by what passes in ourselves, we evidently see our own existence; and we see by same evidence that our Minds are individuals in the most strict and proper sense. Mind is so essentially one, that it is in no sense divisible into distinct integrant parts, neither as space, nor as time. From hence it is evident that Mind is not extended, and

*) I have thought this essay, incomplete as it is, and a mere chapter apparently of some systematic work intended by the author, if health and time had permitted, to be yet *of itself*, a valuable fragment, worthy preserving, for the perusal of my philosophic friends. The few copies printed, and given to them only, cannot be termed a publication.

In *this place* Brook Taylor seems to have had in view an investigation at large of the evidence and operations of the Divine Providence; — and in many other passages of this essay, in allusion to various subjects, he promises further discussion.

consequently does not exist in space, but in a manner wholly inconceivable by us. No terms therefore are applicable to Mind in a proper sense, which imply a relation to space, such as, here, there, present, absent, great, small, whole, part, etc. Mind does not fill space, neither
[60 is it a physical or a [mathematical point, or in any manner in place. When Mind is said to be in place, or to be present to place, or to body which is in place, or when things are said to be in any Mind (as when St. Paul speaking of God, said — „for in him we live, and move, and have our being."). These expressions can be understood no otherwise than in a translated metaphorical sense; meaning only a presence in power, by which Mind is capable of perceiving space, and body in it, and of producing or stopping the motion of body. What attribute is necessary to Mind to make it capable of these things, we do not know: but when by that attribute Mind is so disposed as to perceive, and to be able to act on body, it is said to be present to body; though that presence cannot be understood in a local sense, as if Mind was present to body, either by contact, as bodies are to one another, or by comprehending it, as space is present to body; or by filling it, as bodies do space. We know not how Mind perceives, how
[61 it feels, or how it [acts. And if we reflect on ourselves, though we know ourselves to act, yet in any particular action we know not how we do it, nor how much we do, nor how much of the action proceeds from some extrinsical unknown cause concurring with us to production of the effect. We know not how our soul acts on our body, or how it is affected by the body. We know not how much of the body is immediately concerned in the communication with the soul; though anatomy discovers it probably to be but a small part in the brain. We know not whence it comes, that we cannot have the same communication with all bodies, as we have with that small part of they are not done by our own bare self-action; for many of these of them raised up in our minds by the motions of that part of the brain, and conclude their actual existence from that idea, by a sort of instinct, or habitual judgment that we make; that we perceive not that part of the brain itself, by the means of which we perceive, and
[62 communicate action to other things. [These, and many other things that pass in us, we know not how they are done; but we know that they are not done by our own bare self-action; for many of these things happen to us contrary to our desire, and in spite of all the opposition we can make to them. And we know too, that they are not done by the mere nature of the things, I mean of our Mind and body; because then the communication ought to be indifferent to all body, and we might transfer it from one body to another, as we pleased. Therefore it is evident, that these things are done by some extrinsical cause; some agent who has power over Mind and body, and affects them thus for ends best known to himself.

That being which thus disposes of, and influences us, either immediately by himself, or mediately by his instrumental agents, unknown to us (if there be any such) is properly to be called our *God*. And if we consider the affections of our own and other bodies, their symp-

toms of fluidity and firmness, gra- [vitation, the propagation of [63
sounds, and the propagation of life through the whole visible world, we shall find it probable, in the highest degree, that it is, *One and the same God,* who has thus formed and thus disposes of, and governs all things we are acquainted with. This, together with the necessary consequences that may be drawn from it, is all the knowledge we can have of God by the light of nature. What we know more, is owing to his own good pleasure in revealing it to us, by the prophets, by our Saviour, and by the aposteles. But to confine our thoughts at present to the mere light of nature unassisted by revalation; we can know no more of God, than that in fact he made and governs the world. We know nothing of the manner how he made, and how he governs the world. We only know the fact; for we know nothing of his essence-which is the less to be wondered at, because we do not even know the natures of our own souls.

Some philosophers, by a false kind of rea- [soning, founded in the [64
abuse of several terms, particularly those of perfection and goodness, pretend to establish a great many abstruse maxims about the omnipotence, omniscience, and infinite goodness of God, and about the simplicity of his nature, his self-existence, etc. But all that we can know of these things by our own unassisted reason, is certainly no more than this; — that God's power extends to all those things we actually see performed by him, and by a reasonable induction from them, to all things which in their nature, are possible objects of power; this, we may very justly call *Omnipotence.* — That his knowledge extends to every thing, that we find him any way actually to now, as he certainly does every thing he has done, and thence, by a most reasonable induction, we conclude that he knows every thing that can be the object of knowledge; and this is properly called *Omniscience.* That *his goodness* extends to all his sensible creatures, the reflection upon final causes plainly shewing that the whole oeco- [no- [my of the world does tend as much to the production of their [65
natures can allow of. Thus much we know of the attributes of God, by the mere strength of our own reason. And by reflecting more particularly upon what happens to ourselves, we may come discover the obligations we are under to have a regard to his will in all our actions, as far as we can discover it, and so far we can demonstrate what is called *natural religion;* of which it will be worth while to say something more by and by. *)

As to the creation and government of the universe, and the natures of things, the conjectures and opinions of philosophers are many and various. Some have been perfect atheists, supposing every thing to have been made, and to be continued by the mere powers of nature, without any governing or directing Providence. Some have held all substances, as to their matter, to have existed from all eternity, but assert a God to be necessary, to order and [govern things as they [66
now appear. Some assert, that all substances, besides God himself, were produced and had their existence from him, being created out

*) Vide note, page 58.

of nothing; and they think this (his) assertion to be proved by the light of nature, from the perfections of God, and from the imperfections and contingent nature of all other beings. As to the present continuance and government of the world, these philosophers are diveded in their opinions. Some hold, that the existence of substances, once produced, continue, by the powers given them in the creation, by their own mere natures, without any positive continued act of the Creator; and that his providence appears in the present government of the world in the production of those phaenomena, which cannot be necessary consequences of the natures of things. Other philosophers hold, that the very existence of substances is continued by a positive act of the Creator, by a continued creation, which act, if he should
[67 withdraw, they say, all created existence would cease, [every thing would vanish into nothing; as the sound of a pipe doth cease, when the artist leaves off to blow. And these again are divided in their opinion as to the production of the present phaenomena of nature. Some of them hold, that there is a continual action of the Creator (or of his subordinate instrumental plastic agent), besides the action of conservation or continued creation, to keep things in their present state; which, they say, cannot be the effect of the mere natures of things. Others hold, that all things continue by the mere powers of nature, and that the providence of God appears only in the conservation of existence, and his infinite knowledge and wisdom, in the having ordered every thing in the beginning in so wonderful and beautiful a manner. This is the opinion of the *Cartesians* and *Malbranche*, particularly as to the material world; and of *Leibnitz*, who carries this notion to the most extravagant heighst, asserting it of all subordinate beings in general; of minds, as well as of bodies. And
[68 [he is so extravagant as to assert, that there can be no real physical communication between mind and matter (because *he* cannot perceive how it can be); and in consequences of that opinion he asserts, the phaenomena of minds and bodies to concur and correspond with one another by virtue of a pre-established harmony appointed by God at time of creation. But almost all these philosophers, by asserting things they cannot prove, give too much advantage to atheists, who have nothing to do to overthrow their systems of religion, but only to deny their assertions, and not to grant them their suppositions; or to deny those positive conclusions, which are drawn from no other premises but their own ignorance. When it is asserted, that substances were created out of nothing, it may be answered only by a *non constat*, as may sufficiently appear by what I have said already. To prove that substance was created out of nothing, it must be proved in fact that there was a time when it did not exist; but this can never
[69 be done [by the mere light of nature. Therefore all that is built only on this assertion of creation out of nothing, is merely pecarious; and the atheist has as much right to deny it, as the theist to assert it; so that there is no proof of religion from this principle only. If in fact substances were created out of nothing, that must be proved from relevation; but that I do not meddle with now. Those have yet a

harder task, who maintain that conservation is a continued creation; for by this assertion, they deny substances to be self-subsistent, contrary to the general conceptions of mankind, who conceive bodies and spirits to be substances, requiring no cause for the continuation of their existence. Therefore when they put the whole of religion on this principle, affirming that the providence of God appears in nothing, but in his conservation, or continued creation of substances, and that as to the rest, the phaenomena of the world are carried on by the mere natures of things, they give the atheist too great an advantage; for when [he has denied their conservation (which they can [70
never prove) he has entirely overthrown all their religion. For the same reasoning that makes the world able to subsist in all its phaenomena without a Providence for one day, will make it able to subsist to, and to have subsisted from, all eternity. Therefore the Cartesians should have a care how they put the whole of natural religion upon such slight principles: for I defy them ton convince any man, who has not been prejudiced by the philosophy of the schools, that matter (not to say any thing of our souls) does not exist by its own nature, but requires a positive act of some Superior Being to upheld it from falling into annihilation. Since this notion of conservation is so precarious, and creation out of nothing is as hard to prove by the mere light of nature; the only argument that is left to demonstrate natural religion, is the necessity of a God to produce the phaenomena of the world. Therefore to make this necessity the more sensible, it is worth while to consi- [der how impossible it is to ac- [71
count for the phaenomena of nature, by the mere nature of matter. It will be sufficient to shew it in *gravitation* and *cohesion.* As matter can do nothing but by local motion, therefore these phaenomena must be produced by the rapid motion of a fluid. But to produce gravitation, that rapid motion must tend towards the centre, whither heavy bodies tend. But such a converging motion of a fluid is impossible, and if it did once begin, it would immediately cease by the mutual resistance of the parts of the fluid; and therefore gravitation cannot be solved this way. Neither can cohesion be solved by mere mechanism. For if it be occasioned by mechanism. it must be by a pressure, occasioned by the motion of an ambient fluid: but such a pressure cannot make any particles to cohere which are not hard already; therefore the pressure of a fluid cannot produce hardness, besides, that such a pressure may be proved to be impossible by the common known laws of motion. Therefore nei- [ther cohesion or gravitation [72
can be accounted for by mere mechanics: And much less can the other more compounded phaenomena of nature, as the formation and growth of mineral, vegetable, and animal substances, the motions and life of animals etc. It is necessary, therefore, to have recourse to a Providence influencing every thing in a manner unknown to us. Those who assert this, and consider rightly the final causes which discover themselves in the nature of man, and in every part of the creation, do put natural religion upon the most sure, and unmoveable foundation, whatever be their opinion concerning the creation of

substances from nothing. Dr. Cudworth, in his Intellectual System, calls those but imperfect theists who hold matter to have been eternal, as well as God; and he thinks their notion of God's omnipotence is too narrow. But, if I am not mistaken, their notion of omnipotence was the same as his, viz. „That it is a power of doing every thing
[73 that is doable, every thing but contradictions, that is [every thing that can be conceived capable of being done; conception being the only rule of possibilities." As to the reducing of all impossibilities to what is commonly called a contradiction, I do not know what difficulties might attend this way of explaining things: but in the other part of his definition, viz. „That conception is the rule of possibility, viz. that every thing is possible, which can be conceived;" I believe all the imperfect theists (as he calls them) agree entirely with him. All the difference therefore between them and him is, that he concludes from omnipotence that matter can be produced from nothing, or annihilated, and therefore that God did create it from nothing: but they conclude that God's omnipotence does not reach so far, because they think they conceive the thing itself to be an impossibility. And certainly according to the common notions of mankind, unassisted by revelation, they were on the more probable side
[74 of the question. But according to my present thoughts, it is [wrong to assert positively on either side. Truth in this subject is what our faculties cannot reach to; and therefore it is best to own our ignorance, and neither to affirm or deny. If after a full inquiry I shall find that revelation has asserted creation of substances out of nothing, I am prepared to believe it; because I cannot demonstrate the impossibility of it, no more than I can the possibility, much less the necessity of it. In all our disquisitions, if we have a mind to be certain of the truth we find, and not to be amused with mere opinions, and to run into error; we ought to be very careful to lay no greater stress upon any conclusions, than the nature of the premises they are drawn from require. If the premises are evident and clear conceptions, the conclusions that are rightly drawn from them will be certain knowledge: but if the premises are but probable, or altogether uncertain, the conclusions will be so too, and we ought to value them accor-
[75 dingly. As in all our inquiries it concerns us to use this [caution, so it is most highly necessary that we should do it in those things where religion is concerned. A false argument used in religion does a great prejudice to the whole subject. For an adversary who catches you in a mistake of this kind, will be very apt to think all your reasoning to be of the same stamp; and so will hardly be prevailed upon to listen any more to what you can say, and will thus be hardened in his infidelity. So that it is a great mistake in some persons, who are too much given to mistaken and passionate devotion, which is superstition, to think it a crime, and to cry out immediately as if the foundations of religion itself were going to be undermined, when they see anybody (though purely out of a sincere love for truth) endeavour to shew the weakness, or so much as pretend to question the conclusiveness of any argument, that ever has been used in favour of religion. False argu-

ments are like false friends, and treacherous or cowardly soldiers, who are more likely to betray and weaken a [cause, and to overthrow the [76 security of its solid bulwarks, than to do it any service. Therefore it is a service to truth, and not an injury done it, to discover and to explode all false reasons that have been brought to the pretended support of it. Truth has no occasion for falsehood to support it; its only strength is in its own forces, in its own evidence, which is able to bear out against all attacks, and grows the stronger for being tried. That which will not bear the strictest trial, is not truth, but subtle error, which of all things, it concerns us to detect, and to avoid.

From what is said already of the ignorance we are in of the essence of mind, it is evident that we are not able to know whether any mind be necessarily existent, by a necessity *a priori* founded in its essence, as we have shewed time and space to be. Some philosophers think that such a necessity may be demonstrated of God, from the nature of perfection. For God being infinitely, that is, absolutely perfect, they say he must needs be necessarily [existent; because, say [77 they, necessary existence is one of the greatest of perfections. But I take this to one of those false and imaginary arguments, that are founded in the abuse of certain terms; and of all others this word, perfection, seems to have suffered most this way. I wish I could clearly understand what these philosophers mean by the word perfection, when they thus say, that necessity of existence is a perfection. Does perfection here signify the same thing as it does, when we say that God is infinitely good, omnipotent, omniscient? Surely perfections are properly asserted of the several powers that attend the essences of things, and not any thing else but in a very unnatural and improper sense. Perfection is a term of relation; and its sense implies a fitness or agreement to some certain end, and most properly to some power in the thing that is denominated perfect. The term (as the etymology of it shews) is taken from the operation of artists. When an artist proposes to himself to make any thing that shall [be [78 serviceable to a certain effect, his work is called more or less perfect, according as it agrees more or less with the design of the artist. From arts, by a similitude of sense, this word has been introduced into morality, and signifies that quality of an agent by which it is able to act agreeable to the end its actions tend to. The metaphysicians, who reduce every thing to transcendental considerations, have also translated this term into their science, and use it to signify the agreement that any thing has with that idea, which it is required that thing should answer to. This perfection therefore belongs to those attributes that constitute the essence of a thing, and that being is properly called the most perfect which has all, the best, and each the completest in its kind of those attributes, which can be united in one essence. Perfection therefore belongs to the essence of things, and not properly to their existence; which is not a perfection of any thing, no attribute of it, but only the mere constitution of it *in rerum na-* [*turâ*. Neces- [79 sary-existence therefore, which is a mode of existence, is not a perfection, it being no attribute of the thing, no more than existence is not

a perfection in itself; yet it is so in its cause, upon account of that attribute of the entity from whence it flows: that, that attribute must of all others be the most perfect and most excellent, which necessary-existence flows from, it being such as cannot be conceived otherwise than as existing. But what excellency, what perfection is there in all this? Space is necessarily-existent on account of extension, which cannot be conceived otherwise than as existing. But what perfection is there in space upon this account, which can in no manner act on any thing, which is entirely void of all power, wherein I have shewed all perfections to consist? Therefore necessary-existence, abstractly considered, is no perfection; and therefore the idea of infinite per-
[80 fection does not include, and consequently [not prove God to be, necessarily-existence. If he be so, it is on account of those attributes of his essence, which we have no knowledge of.

Literaturverzeichnis.

Acta eruditorum, Lipsiae, 1693/4, 1703, 1714, 1716, 1718—1722, 1724, Suppl. tom. VIII, sect. V, 1724.

Bernoulli, Joh., Opera omnia, Lausanne und Genf 1742, Bd. I und II.

Bernoulli I., Joh., Lectiones de calculo differentialium, hrsg. v. P. Schafheitlin, Verhandlungen der Naturforsch.-Ges. in Basel, Bd. 34, 1922.

Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Leipzig, Bd. I, 1900; Bd. VI, 1905; Bd. VII, 1906/7; Bd. XI, 1910/1; Bd. XII, 1911/2.

Bibliothèque Angloise ou histoire litteraire de la Grande Bretagne p. Michel de la Roche, Teil IV, 1, 1717, Amsterdam.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, III², 1901; IV, 1908.

Commercium epistolicum Collins et aliorum de Analysi promota, Londini 1712, 2. 1722. Réimpr. p. J. F. Biot et F. Lefort, Paris 1856.

Correspondence of Newton and Cotes. By J. Edleston. London 1850.

Correspondence of scientific men of the 17.th century in the collection of the Earl of Macclesfield, Oxford 1841, Vol. I. (Herausgg. v. St. J. und St. P. Rigaud).

Genocchi, A., Calcolo differenziale, ed. G. Peano, 1884, hrsg. v. G. Bohlmann u. A. Schepp, Leipzig 1899.

Hermann, Jakob, Phoronomia seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libriduo, Amstelodami 1716.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1716.

Hofmann, J. E. und H. Wieleitner, Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Mit Zusätzen v. D. Mahnke. Sitzungsberichte d. Preußischen Akademie der Wiss., phys. math. Klasse 1931, XXVI, Berlin 1931.

Hoüel, J., Sur une formule de Leibniz, Bordeaux 1869. (Vgl. Tardy).

Journal Literaire, Haag 1716.

Leibniz, Mathematische Schriften, hrsg. v. C. I. Gerhardt, Bd. I u. II, Berlin 1849/50, III—VII, Halle 1855/63.

— Briefwechsel mit Mathematikern. Hrsgg. v. demselben. Bd. I, Berlin 1899.

— Nouveaux essais sur l'entendement, in: Philosophische Schriften, hrsgg. v. demselben, Berlin 1875—90, Bd. V, 1882.

Locke, An Essay concerning human understanding, London 1690 u. ö.

Mahnke, D., Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte d. höheren Analysis, Abhandlungen d. Preuß. Akad. d. Wiss. Jg. 1925, phys. math. Klasse No. 1, Berlin 1926.

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1702, 1706, 1711, 1714, 1717/18.

Miscellanea Berolinensia. (Berliner Akademieabhandlungen), Berlin 1710.

Moivre, Abr. de, Animadversiones contra Cheyneum, 1704.

— De mensura sortis, in Phil. Transact. 1711.

— The doctrine of chances, London 1718.

Newton, Is., Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, 2. Cambridge 1713, 3., London 1726.

— Tractatus de quadratura curvarum, Anhang zu: Opticks, London 1704. Ferner in: Analysis per quantitatum series etc. Ed. by W. Jones, London 1712.

— Arithmetica universalis, Cambridge 1707, 2. London 1722, 3. Leyden 1732.
— The chronology of ancient kingsdoms amended, London 1728.
— Opera mathematica, philosophica et philologica. Rec. J. Castillioneus. Tom I, Lausanne und Genf 1744.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. XVIII (1693/4), Vol. XXVII—XXXII (1711—1722).
Raphson, Jos., The History of Fluxions, London 1715 (mit einem späteren Appendix von Newton, 1716/7).
Schlosser, Edg. Osw., Die Rezensionstätigkeit v. Leibniz, Diss. Heidelberg 1934.
Scholtz, L., Die exakte Grundlegung der Infinitesimalrechnung bei Leibniz, Diss. Marburg 1934.
Smith, Rob., Harmonia mensurarum, Canterbury 1722.
Tardy, Intorno ad una formolar del Leibniz, Bulletin de Bibliogr. et de l'Hist. des Sciences, Juni 1868, dazu Note v. Genocchi, Turiner Acad. Januar 1869. (Vgl. Hoüel).
Taylor, Brook, Methodus incrementorum directa et inversa, London 1715. 2. 1717; Facsimiledruck der letzteren Ausgabe Berlin 1862.
— On the principles of linear perspective, London 1715, 2. 1719.
— Contemplatio philosophica, hrsg. von Sir William Young, London 1793.
Weißenborn, H., Die Prinzipien d. höheren Analysis, Halle 1856.
Wieleitner, H., Geschichte d. Mathematik, II. Teil, 1. Hälfte, Leipzig 1911.

Lebenslauf.

Als Sohn des Oberpostinspektors und kriegsfreiwilligen Frontkämpfers (1914/18) Heinrich Auchter und dessen Ehefrau Johanna Auchter, geb. Frey bin ich am 9. 9. 1909 zu Mannheim geboren und besitze die Deutsche Staatsangehörigkeit und das evangel. Religionsbekenntnis. In Mannheim besuchte ich zunächst die Grundschule und dann das Realgymnasium II, an dem ich an Ostern 1929 das Reifezeugnis erlangte. Vom Sommersemester 1929 an studierte ich dann Mathematik, Physik und Philosophie an den Universitäten Heidelberg (S.S. 1929 — W.S. 1930/31), Würzburg (S.S. 1931), Heidelberg (W.S. 1931/32—S.S. 1934), Marburg (S.S. 1935). Während meiner Studienzeit widmete ich mich nebenbei 4 Semester lang dem Studium der Leibesübungen und erlangte auf Grund der abgelegten Prüfung die Lehrberechtigung als Turn- und Sportlehrer. In Heidelberg arbeitete ich unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Bopp an einer wissenschaftlichen Arbeit; durch seine wiederholte längere Erkrankung und dann seinen plötzlichen Tod wurde ich in der Fortsetzung meiner Arbeit behindert. In liebenswürdiger Weise übernahm Herr Prof. Dr. Mahnke die weitere Leitung meiner Arbeit, wofür ich ihm zu besonderem Dank verpflichtet bin. Während meiner Studienzeit hörte ich insbesondere die Vorlesungen der Herren Prof. Drs. Becker, Bopp, Harms, Hofmann, Lenard, Mahnke, Neumann, Ott, Volk, Wolf. Um mir für meinen künftigen Beruf (Versicherungsfach) die nötigen juristischen Kenntnisse anzueignen, besuchte ich auch juristische Vorlesungen.

Heinrich Auchter.